Donô oblatus ab A.R.P. D. Cornelio Eccl.
Dignissimo Priore Erem. Marti Argentin.
Affte Grae 1812° 8. 7br

[illegible]

A

MATHESIS
WOLFIANA
IN USUM
JUVENTUTIS SCHOLASTICÆ
PER TERRAS HÆREDITARIAS
AUSTRIACÆ DOMUS
A
SUPREMA
STUDIORUM COMMISSIONE
PRÆSCRIPTA,
ET A
DIRECTORE
FACULTATIS PHILOSOPHICÆ
VIENNENSIS
IN COMPENDIUM REDACTA
ANNO MDCCLXXVI.
complectens
ARITHMETICAM, GEOMETRIAM, ET
TRIGONOMETRIAM, UNA CUM ALGEBRA
AD UNAMQUAMQUE HARUM PARTIUM
APPLICATA.

VINDOBONÆ,
TYP. JOANN. THOMÆ NOB. DE TRATTNERN,
CÆS. REG. AULÆ TYPOGR. ET BIBLIOP.

PRÆFATIO.

Ut Compendium hoc nil nisi Wolfiana complectatur (nam pauca tantum invenies, quæ, ne veritatum in eo contentarum nexus, & præfixus ordo interrumperetur, compendii gratia erant immutanda) præfationis quoque loco, non mea, sed Authoris celeberrimi verba, quæ *Tom. V. Element. Mathes. Univer. Cap. II. de modo instituendi studium Matheseos intellectus perficiendi causa*, sparsim leguntur, huc transcribere decrevi;

„ Sunt qui sibi aliisque persuadere conantur, quasi methodus mathematica Philosophiæ minus conveniat, multo autem adhuc minus in Theologia, Jurisprudentia & Medicina eidem locus sit. Equidem hoc dubium jam sustulimus in *Discursu præliminari*, quem logicæ præmisimus *de Philosophia in genere*, ubi (§. 139.) identitatem methodi philosophicæ

ac mathematicæ demonſtravimus, ex noſtra tamen definitionum & demonſtrationum propoſitionum analyſi ſingulari ratione idem elucet. Etenim per hanc manifeſtum eſt, omnem & veram methodum mathematicam huc tandem redire, ut operationum intellectus legitimum faciamus uſum in ſveritate cognoſcenda, qui ad evidentiam requiritur, qua veritas indubitato agnoſcitur. Hinc manifeſtum eſt, non alias homini eſſe facultates, quibus in cognoſcendis Mathematis utitur, quam quibus opus habet ad cognoſcendam veritatem quamcunque aliam; nec alium eſſe facultatum earundem uſum in Matheſi addiſcenda, vel etiam in veritatibus Mathematicis inveniendis, quam qui requiritur ad certam cognitionem veritatis cujuscunque alterius, ſive ab aliis inventa fuerit, ſive demum noſtra opera detegenda. Matheſis adeo exemplis docet, quomodo rectus facultatum cognoſcendi uſus fieri debeat, ſi ad liquidam veritatis cognitionem

nem pervenire decreveris, id quod regulis docet Logica, quæ ideo ab exemplis mathematicis abſtrahi poſſunt, ita ut earundem cum praxi Mathematicorum conformitas ſit lapis Lydius genuinæ Logicæ. Qui igitur in ea ſunt opinione, quaſi Matheſis propriam ſibi habeat methodum, quæ extra eam nullius ſit uſus, hi aut methodi mathematicæ vim ac poteſtatem, aut genuinum facultatum cognoſcendi ad certam veritatis cognitionem conſequendam uſum, aut utrumque ignorant. Denique noſtra Mathematum tractatio manifeſto loquitur, eum, qui in Matheſi addiſcenda præſcriptum a nobis morem obſervat, ſequi modum cogitandi maxime naturalem. Quis igitur adeo veſanus eſt, ut ſibi perſuadeat, uſum facultatum aliis legibus accommodandum eſſe in Philoſophia, Theologia, Jurisprudentia, Medicina, quam quas fert natura animæ?

„ Etſi autem Matheſis univerſa faciat ad intellectum perficiendum, ſi ſecundum ve-

ram methodum tractetur; quoniam tamen non omnibus tantum ſuppetit temporis ſpatium, quantum huic labori ſufficit, unusquisque eousque progredi poterit quantum conceditur. *Arithmeticæ* autem *& Geometriæ pertractatio prorſus indiſpenſabilis eſt*, quæ ſi ſtudio Logicæ præmittatur (aut eidem jungatur) & in Matheſi juxta Philoſophiam pergere volueris, futurum certus ſum, ut ſtudium Matheſeos ac Philoſophiæ ſibi mutuo lucem affundant.

„ Supponimus autem Philoſophiam eadem methodo eſſe conſcriptam, qua in Elementis noſtris matheſeos utimur; quemadmodum fecimus in operibus noſtris philoſophicis Latino inprimis idiomate conſcriptis; quæ, ſi non ante ulterius progredi volueris, quam ſingula rite intellexeris, ac veritatis eorum convictus fueris, multo minore temporis ſpatio perlegere poteris, quam breve quoddam compendium communi more conſcriptum, modo in pertractanda Arithmetica &

Geo-

Geometria induſtriam tuam deſiderari paſſus non fueris.

„ Cum adeo inter fines, qui per ſtudium Matheſeos intendi poſſunt, emineat perfectio intellectus: quæ conſiſtit in habitu rectum faciendi facultatum cognoſcendi uſum in veritate cognoſcenda; hunc finem intendere debent, quotquot ad certam cognitionem in quocunque genere cognoſcibilium adſpirant: ſive philoſophari voluerint, ſive Theologiæ, Jurisprudentiæ ac Medicinæ operam navare decreverint. Ea de cauſa veteres neminem ad Philoſophiam addiſcendam admittere voluerunt, niſi Geometriæ peritum: cum olim Geometria ſola accurata methodo traderetur. Optandumque erat, ut idem mos in ſcholas noſtras introduceretur.

„ Sed non nuda cognitione veritatum mathematicarum perficitur intellectus, accuratæ methodo, qua traduntur Mathemata, fructus debetur. Ejus adeo participes non fiunt, qui methodum accuratam inſuper habent. Quamobrem cum Ma-

theſis

thesis perficiendi intellectus causa potissimum in scholas sit introducenda, parum adolescentibus & juvenibus consulunt, qui, ut desidiosis placeant, methodi nullam rationem habent, sibi magis quam ipsis prospicientes.

DE
METHODO
MATHEMATICA
BREVIS COMMENTATIO.

§. 1.

Per *Methodum Mathematicam* intelligo Ordinem, quo in tradendis dogmatis suis utuntur Mathematici.

§. 2. Ordiuntur autem Mathematici a definitionibus; inde ad axiomata & postulata, in Mathesi mixta ad experientias seu observationes, progrediuntur; his tandem theoremata & problemata superstruunt: ubique vero corollaria & scholia, si e re visum fuerit, annectunt.

§. 3. Sunt autem *Definitiones* primæ rerum notiones, quarum ope inter se distinguuntur & unde, quæ de ipsis concipiuntur, reliqua deducuntur.

§. 4. Per *Notionem* quamlibet rei cujuslibet in mente repræſentationem intelligo.

§. 5. Notionum differentiam primus diſtincte tradidit ſagaciſſimus *Leibnitius*: (*) quæ, quanti ſit ponderis, pauci hactenus agnoverunt.

§. 6. Eſt ſcilicet *Notio clara*, quæ ad rem oblatam recognoſcendam ſufficit, e. gr. quod figura data in numero triangulorum habeatur.

§. 7. *Obſcura* eſt *notio*, quæ ad rem oblatam recognoſcendam non ſufficit. Talis eſt e. gr. plantæ, ad cujus conſpectum dubitas, utrum ea ſit nec ne, quam alio tempore alibi videras & cui hoc vel illud nomen tribui ſuevit.

§. 8. Clara *notio diſtincta* habetur, ſi notas recenſere valeas, ex quibus rem oblatam recognoſcis, e. gr. quod circulus ſit figura linea curva in ſe redeunte terminata, cujus ſingula puncta ab eodem puncto intermedio æqualiter diſtant.

§. 9. *Confuſa* eſt *notio* clara, ſi notas, ex quibus rem oblatam recognoſcis, recenſere minime valeas, utut in tales ſit reſolubilis: qualis eſt e. gr. notio coloris rubri.

§. 10. Diſtincta *notio adæquata* dicitur, ſi & notarum, ex quibus componitur, notiones diſtinctas habueris, e. gr. notio circuli paulo ante tradita cenſetur adæ-

(*) In Actis Eruditorum An. 1684. p. 537.

adæquatæ, ubi curvæ in se redeuntis, puncti intermedii, distantiæ æqualis & terminationis notiones distinctas habueris.

§. 11. In hac analysi cum progredi liceat, donec ad notiones irresolubiles perveniatur; notionum adæquatarum dari gradus manifestum est, in præsenti tamen non explicandos.

§. 12. *Inadæquata* est *notio*, si notarum, quæ distinctam ingrediuntur, nonnisi confusas notiones habueris.

§. 13. In numerum definitionum mathematicarum non admittuntur nisi notiones distinctæ, &, quantum fieri potest, aut pro re nata sufficit, adæquatæ.

§. 14. Hinc in definitionibus subsequentibus non utuntur vocibus, nisi vel ex antecedentibus, vel aliunde satis intelligatur, quæ res iis subjiciantur.

§. 15. Et, si quando notione confusa contenti sumus, res, ad quam spectat, obvia sit necesse est, ut vel præsentem, quandocunque libuerit, percipere, vel sæpius jam olim perceptæ haud difficulter reminisci valeamus.

§. 16. Definitiones vero ad duas classes commode revocantur. Sunt nimirum aliæ nominales, aliæ reales.

§. 17. *Definitio nominalis* est enumeratio notarum ad rem oblatam ab aliis distinguendam sufficientium. Talis est

quadrati, si figura quadrilatera, æquilatera, rectangula esse dicatur.

§. 18. *Definitio realis* est notio distincta rei genesin, hoc est, modum, quo fieri potest, exponens: Talis in Geometria est Circuli, si per motum lineæ rectæ circa punctum fixum describi concipitur.

§. 19. Definitiones tam reales, quam nominales cum in se considerari, tum inter se conferri possunt. Quicquid ex consideratione eorum, quæ in una definitione continentur, immediate deducitur, *Axioma* vocatur, si quid rei convenire aut non convenire enunciet; *Postulatum* vero, siquid effici posse affirmet vel neget. E. gr. Ex genesi circuli liquet, omnes rectas ex centro ad peripheriam ductas inter se æquales esse, cum unam eandemque lineam in diverso situ referant. Hæc adeo propositio in axiomatum numero habetur. Ast dum per eandem definitionem intelligitur; ex quovis puncto quovis intervallo circulum describi posse: id inter postulata collocatur.

§. 20. Quoniam igitur axiomatum & postulatorum veritas per intuitum definitionum, ex quibus fluunt, cognoscitur; demonstratione nulla indigent. Vera enim esse intelliguntur, quam primum realitas definitionum fuerit evicta. Et hoc intuitu *propositiones per se notæ* item *ex terminis manifestæ* dicuntur.

§. 21.

§. 21. Multi hac axiomatum proprietate abutuntur, dum præmiſſas ſyllogiſmorum, quas probare neſciunt, pro axiomatibus venditant.

§. 22. Notandum nimirum, eo minorem fieri axiomatum numerum, quo ſufficientius notiones evolvuntur. Immo ſi verum fateri fas eſt, vera axiomata non ſunt niſi propoſitiones identicæ.

§. 23. Cum axiomatibus & poſtulatis etiam experientiæ nonnunquam confunduntur. *Experiri* autem dicimur, quicquid ad perceptiones noſtras attenti cognoſcimus, e. gr. dum accenſa candela conſpicua fieri videmus, quæ ante non apparebant.

§. 24. Experientiæ itaque ſunt rerum ſingularium, quoniam nonniſi res ſingulares percipimus. Quamobrem ad illas provocans caſum ſingularem in medium proferre tenetur, niſi vel ſenſui, vel memoriæ fuerint obviæ: id quod in Matheſi exactiſſime obſervatur. Neque enim e. gr. in Aſtronomia Solis orientis & occidentis obſervationes recenſentur, utpote quotidianæ ac omnibus ſatis notæ. Diametri vero apparentis Planetarum obſervationes a diverſis Aſtronomis tempore diverſo diverſisque inſtrumentis celebratæ fideliter referuntur, cum non in cujusvis poteſtate exiſtant.

§. 25. Propoſitio theoretica ex pluribus definitionibus inter ſe collatis eruta *Theorema* appellatur. E. gr. Si in Geometria triangulum cum parallelogrammo ſuper eadem baſi & ejusdem altitudinis confertur, & partim immediate ex ipſis eorundem definitionibus, partim ex aliis ipſorum proprietatibus jam ante erutis infertur; parallelogrammum eſſe trianguli duplum: ea propoſitio in theorematum numerum referenda.

§. 26. Duo autem ſunt, quæ in omni theoremate attentionem merentur, *Propoſitio* nempe atque *Demonſtratio.* Iſta quidem enunciatur, quid rei cuidam ſub certis conditionibus convenire poſſit, quid non: in hac autem rationes exponuntur, ob quas intellectus illud ipſi convenire concipere valet.

§. 27. Abſolute poſſibile non eſt niſi ens a ſe: reliqua vero omnia tantum admiſſo alio poſſibilia eſſe intelliguntur, hoc eſt, nil eorum eſt ſine quadam conditione. Hæc igitur in propoſitione una exprimenda. E. gr. Triangulum eſt dimidium parallelogrammi, ſi baſes & altitudines fuerint ſigillatim æquales. In propoſitione itaque tam baſium, quam altitudinum æqualitas exprimenda. Hinc quælibet propoſitio in *Hypotheſin* & *Theſin* commode diſtinguitur: quarum iſta conditiones recenſet, ſub quibus aliquid affirmatur, vel negatur; hæc vero com-

plecti-

plectitur, quod vel affirmatur, vel negatur. E. gr. In propositione allata hypothesis est, *si triangulum & parallelogrammum super æquali basi & ejusdem altitudinis existant;* thesis autem, *illud hujus dimidium est.*

§. 28. Notandum vero, si in ipsa rei definitione conditiones, de quibus dixi, continentur, hypothesin distincte non exprimi. E. gr. Si tres in triangulo anguli 180. graduum dicantur; hypothesi carere videtur propositio: quæ tamen statim comparet, si pro voce trianguli definitionem ejus substituas. Ita enim habet propositio: si quædam figura tribus lineis rectis terminatur, tres habet angulos junctim sumtos duobus rectis æquales. En hypothesin, quæ urget, ut tres lineæ rectæ spatium comprehendant.

§. 29. Datur autem in propositione affirmativa necessarius nexus inter hypothesin atque thesin: in negativa autem nullus concipi potest, sed hæc illi repugnat. Quoniam scilicet in subjecto deprehenditur, quod hypothesis involvit; ei quoque convenire debet, quod in thesi continetur. E. gr. In hoc theoremate, quod *triangulum sit dimidium parallelogrammi super eadem basi & ejusdem altitudinis*, primum triangulo tribuimus basin & altitudinem basi ac altitudini parallelogrammi æquales; dein asserimus,

quod ſit parallelogrammi dimidium. Poſterius concipitur propter prius.

§. 30. Nexum inter theſin & hypotheſin in propoſitionibus affirmativis; repugnantiam in negativis *demonſtratio* manifeſtat. Eorum igitur definitiones, quæ in hypotheſi ac theſi continentur, eorundemque proprietates ex iſtis derivatæ aut aliunde cognitæ demonſtrationum principia exiſtunt. Quoniam vero in Matheſi principia non admittuntur niſi quæ ante fuerunt evicta; definitiones ac propoſitiones, quibus demonſtrationes ſuperſtruuntur, citari ſolent, partim ut appareat, genuina principia adhiberi; partim ut ignaris conſtet, unde ipſorum certitudo haurienda.

§. 31. Enimvero citationes definitionum, axiomatum, poſtulatorum theorematum & problematum non exiguum habent uſum, nec ſine ratione in Matheſi ſingulis cogitationum generibus ſingula nomina imponuntur. Demonſtratio namque non convincit niſi principiis demonſtrandi extra dubitationis aleam poſitis. Quamobrem ex citationibus liquet, quænam tanquam vera ſupponenda ſint, antequam veritatis propoſitionis datæ convinci poſſis.

§. 32. Non alia vero eſt ratio ex principiis concluſiones inferendi, quam quæ in omnibus libellis logicis, ubi de ſyllogiſmo agitur, dudum expoſita. Sunt

enim

enim demonſtrationes Mathematicorum congeries quædam enthymematum, ita, ut omnia vi ſyllogiſmorum concludantur, omiſſis ſaltem præmiſſis, quæ vel ſponte meditanti occurrunt, vel per citationes in memoriam revocantur. Perfecta autem ut ſit demonſtratio, præmiſſæ ſyllogiſmorum novis ſyllogiſmis tamdiu probandæ ſunt, donec perveniatur ad ſyllogiſmum, in quo præmiſſæ ſunt vel definitiones, quas jam conſtat eſſe poſſibiles vel propoſitiones aliæ identicæ.

§. 33. *Problemata* facienda proponunt & tribus partibus conſtant, *Propoſitione* ſcilicet, *Reſolutione* ac *Demonſtratione*. In propoſitione, quid fieri debeat, indicatur. In reſolutione ſinguli actus ordine decenti recenſentur, quibus efficitur, quod erat faciendum. Denique in demonſtratione evincitur, factis iis, quæ reſolutio præcipit, effectum intentum obtineri. Quoties itaque problema demonſtrandum, in theorema convertitur, cujus hypotheſin reſolutio, theſin vero propoſitio conſtituit. Generalis enim omnium problematum demonſtrandorum (ut jam innuimus) tenor hic eſt: Factis iis, quæ reſolutio præcipit, illud quoque efficitur, quod erat faciendum. Quare non opus eſt, ut de problematibus plura dicantur.

§. 34. Rationes ſubinde non deſunt, cur ad caſus ſpeciales applicentur propo-

ſitiones generales, & ex quibusdam propoſitiones ſæpe alias prona conſequentia deducere licet. Quæ utroque modo eruuntur propoſitiones *Corollaria* nuncupantur.

§. 35. Primum corollariorum genus demonſtratione non indiget. Quod enim in genere de omnibus in univerſum caſibus demonſtratum fuit, de hoc vel iſto in ſpecie, ut denuo demonſtretur, opus non eſt. E. gr. Ubi de omnibus triangulis oſtenſum, tres angulos eorum una ſumtos duobus rectis æquari; idem in ſpecie de triangulis rectangulis confirmari haud debet. Aſt alterum corollariorum genus demonſtrationem requirit. Quotiescunque nimirum ex aliis propoſitionibus aliquid infertur, ratio illationis indicanda. E. gr. Si theorematí, cujus modo mentionem feci, hoc corollarium ſubjungatur; *in triangulo rectangulo unus ſaltem actu rectus eſſe poteſt*: ratio illiationis non negligenda, quod ſcilicet, poſitis duobus actu rectis, tertius nihilo æqualis foret.

§. 36. In *Scholiis* denique tam definitionibus, quam propoſitionibus earumque corollariis ſubjungi ſolitis, obſcura declarantur, ad dubia reſpondetur, uſus doctrinarum indicatur, hiſtoria ac fontes inventionum deſcribuntur, &, ſi qua alia ſcitu nec injucunda, nec inutilia occurrunt, inſeruntur.

§. 37.

§. 37. Explicatam hactenus methodum qui probe perpendit, ejus univerſalitatem haud dubie agnoſcet, nec diffitebitur, ſine ea ad ſolidam rerum cognitionem perveniri haud quaquam poſſe. Dicitur vero *Methodus Mathematica*, immo ſæpius *Geometrarum methodus*, quia huc usque Mathematici fere ſoli, in Geometria inprimis, ejus leges ſancte cuſtodiverunt. Quanquam enim non defuerint, qui eandem aliis diſciplinis applicare ſtuduerunt; conatui tamen ipſorum eventus minime reſpondit. Etenim nunc notiones non ſatis evolverunt, nunc ſine probatione aſſumſerunt, quæ maxime probari debebant, nunc per ſaltum ratiocinati ſunt, inferentes nimirum, quæ nullo argumento inferri poſſunt.

§. 38. Explicatæ methodi legibus cum ex aſſe ſatisfiat in Matheſi præſertim pura, non ex vano prædicatur, quod Mathemata judicium acuant, hoc eſt, quod eorum cultores promptitudinem acquirant, veritatem quamlibet, ad quam cognoſcendam animum appellunt, accuratius, quam alii ſolent, dijudicandi. Exercitio enim comparatur judicandi etiam ac ratiocinandi habitus, quale demonſtrationum mathematicarum meditatio cenſeri debet.

§. 39.

§. 39. Fructus igitur, quem ex ſtudio Matheſeos maximum percipere licet, participes non fiunt, quotquot praxes quasdam mathematicas aliasque parum mathematici habentes, vulgo tamen ad eandem referri ſolitas, addiſcunt. Licet enim in vita communi utiles exiſtant; neminem tamen judicii acumine ac inveniendi habitu beant, quia *per* §. *præc.* hæc non, niſi a ſeria demonſtrationum meditatione, expectare licet.

ELEMENTA ARITHMETICAE.

CAPUT I.

DE PRINCIPIIS ARITHMETICÆ.

Definitio I.

1. *Arithmetica* eſt numerorum ſcientia. Pars ejus *practica* eſt ſcientia computandi, hoc eſt, ex quibusdam numeris datis inveniendi alios, quorum ad cognitos relatio datur; ut, ſi fuerit inveniendus numerus, qui duobus 6. & 8. junctim ſumtis æqualis eſt.

Definitio II.

2. *Unum* eſt, quod ita eſt aliquid, ut aliud præterea idem eſſe nequeat.

Definitio III.

3. Unitas eſt abſtractum per quod dicimus unum.

Definitio IV.

4. *Unitates eædem* ſunt, quæ per eandem notionem agnoſcuntur: *diverſæ* ſunt, quæ agnoſcuntur per diverſas.

uni-

SCHOLION.

5. *Ponamus e. gr. A esse globum lapideum, B similiter esse globum lapideum alium: erunt A & B unitates eædem. Sed si A fuerit globus lapideus, C plumbeus: erunt A & C unitates diversæ. Quodsi A, B & C tantum ut globos consideres, erit etiam C eadem unitas cum A & B.*

DEFINITIO V.

6. Si A sit idem cum B, C & D simul sumtis, dicetur A *Totum*; B vero, C & D dicentur ejus *Partes*, & intuitu partis B, reliquas C & D &c. *Complementum ad Totum* vocabimus.

DEFINITIO VI.

7. Quicquid refertur ad unitatem ut linea recta ad aliam rectam, *Numerus* dicitur.

SCHOLION I.

8. *Nempe si pro unitate linea recta sumatur; numerus quoque exprimi potest per rectam: id quod infra in Geometria & Analysi abunde patebit.*

SCHOLION II.

9. *Numerus autem adeo generaliter definiendus, ut sub eadem definitione numeros cum integros, tum fractos tam rationales, quam irrationales comprehendere valeamus.*

DEFINITIO VII.

10. *Numerus determinatus* eſt, qui refertur ad unitatem datam, ut ternarius. *Indeterminatus* eſt, qui refertur ad unitatem vagam, diciturque *Quantitas.*

SCHOLION.

11. *In quantitatum numerum refertur latitudo fluvii. Quodſi quæſiveris, quanta ea ſit; quantitatem concepturus unitatem quandam ad arbitrium aſſumit & illius ad hanc relationem quærit, ac pro diverſa unitate aſſumpta per diverſum numerum determinatum latitudinem fluvii enunciat. Latitudo igitur fluvii inter quantitates collocatur, quatenus refertur ad unitatem vagam: qua determinata, per numerum determinatum diſtincte intelligitur.*

DEFINITIO VIII.

12. *Æqualia* ſunt, quorum unum alteri ſalva quantitate ſubſtitui poteſt. Inæqualia ſunt, ſi pars unius alteri toti ſubſtitui poteſt.

COROLLARIUM I.

13. Quoniam pars unius inæqualium alteri toti ſubſtitui poteſt, quod vero alteri, ſalva nempe quantitate, ſubſtitui poteſt, alteri æquale eſt (§. 12.); pars unius inæqualium alteri toti æqualis eſt.

COROLARIUM II.

14. Similiter cum unum inæqualium pro alterius parte ſubſtitui poſſit (§. 12.); erit idem alterius parti æquale.

HYPO-

HYPOTHESIS I.

15. *Signum æqualitatis eſt* =.

DEFINITIO IX.

16. *Majus* eſt, cujus pars alteri toti æqualis eſt: *Minus* vero, quod parti alterius æquale.

COROLARIUM.

17. Cum pars unius inæqualium A alteri toti B æqualis ſit (§. 13.) & viciſſim B æquale parti ipſius A (§. 14.); inæqualium unum A majus, alterum B minus eſt (§. 16.).

HYPOTHESIS II.

18. *Signum majoritatis eſt* > ; *minoritatis* <.

DEFINITIO X.

19. *Similia* ſunt, in quibus ea eadem ſunt, per quæ a ſe invicem diſcerni debebant. *Diſſimilia* ſunt, in quibus ea diverſa ſunt, per quæ a ſe invicem diſcerni debent. Atque adeo *Similitudo* eſt identitas; *Diſſimilitudo* diverſitas eorum per quæ res a ſe invicem diſcerni debent.

COROLLARIUM I.

20. Nihil ergo in uno Similium deprehenditur, quod non æque deprehendatur in altero, modo ſit iſtiusmodi, ut ſine alio aſſumto intelligi poſſit.

Co-

COROLLARIUM II.

21. Cum quantitas ſine alio aſſumto per ſe non intelligi, ſed tantum dari poſſit (§. 10. 11.); Similia, ſalva ſimilitudine, quantitate differre poſſunt (§. 20.), atque adeo quantitas eſt diſcrimen internum ſimilium.

HYPOTHESIS III.

22. *Signum ſimilitudinis eſt* ∽.

DEFINITIO XI.

23. *Pars aliquota eſt*, quæ aliquoties repetita integro fit æqualis. *Pars* vero *aliquanta* eſt, quæ repetita aliquoties ſemper vel major, vel minor eſt, toto

DEFINITIO XII.

24. *Commenſurabilia* ſunt, quæ partem aliquotam communem habent, vel quorum unum eſt pars aliquota alterius. *Incommenſurabilia* ſunt, quorum nulla datur pars aliquota communis.

DEFINITIO XIII.

25. *Numeri inter ſe homogenei* ſunt, qui ad eandem; *heterogenei*: qui ad diverſas unitates referuntur.

DEFINITIO XIV.

26. *Numerus integer* eſt, qui refertur ad unitatem tanquam totum ad partem.

DEFINITIO XV.

27. *Numerus fractus* eſt, qui refertur ad unitatem tanquam pars ad totum. Licitur is etiam *Fractio*, itemque *Minutia*.

DEFINITIO XVI.

28. *Numerus rationalis* eſt, qui unitati commenſurabilis. Vocatur etiam *effabilis*.

DEFINITIO XVII.

29. *Numerus irrationalis ſive ſurdus* eſt, qui unitati incommenſurabilis. Vocatur etiam *ineffabilis*, item *geometricus*.

HYPOTHESIS IV.

30. *Si in numerando ad denarium pervenitur, initium numerandi repetatur, niſi quod denariorum numerus una exprimatur.*

COROLLARIUM.

31. Decem ergo nominibus opus eſt ad decem numeros rationales primos indigitandos & præterea aliis, quibus decadum multitudo denotetur, & ita porro.

DE-

DEFINITIO XVIII.

32. Decem illa nomina, quibus in numerando utimur, ſunt: *unum*, *duo*, *tria*, *quatuor*, *quinque*, *ſex*, *ſeptem*, *octo*, *novem*, *decem*. Iidem numeri generali *Unitatum* nomine inſigniri ſolent, nec opus eſt ut definiantur. Dicuntur etiam *Digiti*. Ex decem unitatibus componitur una *Decas*. Duæ decades dicuntur *viginti*; tres *Triginta*; quatuor *Quadraginta*; quinque *Quinquaginta*; ſex *Sexaginta*; ſeptem *Septuaginta*; Octo *Octoginta*; novem *Nonaginta*. Ex decem decadibus componitur *Centenarius*; ex decem centenariis *Millenarius*; ex mille millenariis *Millio*; ex mille millenariis millionum *Billio*; ex mille millenariis billionum *Trillio* &c. Denarius ejusque quævis multipla dicentur *Articuli*.

SCHOLION.

33. *Vocibus millionum, billionum, trillionum &c. utimur ad confuſionem in numeris magnis evitandam, quorum diſtinctis notionibus formandis inſerviunt.*

HYPOTHESIS V.

34. *Notæ numericæ conſtituantur novem ſequentes:* 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. *Ut vero non ſolum unitates, ſed & decades, centenarios, millenarios &c. indigi-*

tare possimus, valor ipsis tribuatur localis, ita ut solitariæ vel in loco dextimo positæ unitates sive digitos, in secundo decades, in tertio centenarios, in quarto millenarios &c. denotent. Loca vacua repleantur cyphra 0, *quæ scilicet sit* Nullitatis *nota.*

COROLLARIUM I.

35. Numerorum igitur partes hoc ordine se invicem excipiunt:

Unitates Decades Centenarii	Simplices.
Unitates Decades Centenarii	Millenariorum.
Unitates Decades Centenarii	Millionum.
Unitates Decades Centenarii	Millenariorum Millionum.
Unitates Decades Centenarii	Billionum.
Unitates Decades Centenarii	Millenariorum Billionum.
Unitates Decades Centenarii	Trillionum.

Uni-

Unitates }
Decades } Millenariorum Trillionum &c.
Centenarii }

PROBLEMA I.

36. *Numerum ſcriptum enunciare, hoc eſt, cuilibet characteri valorem competentem aſſignare.*

RESOLUTIO.

1. Numerus propoſitus per commata dividatur in claſſes, tres notas unicuique aſſignando, initio a dextris facto.
2. Nota dextima claſſis tertiæ notetur lineola transverſa apici adſcribenda; dextima claſſis quintæ duabus; dextima ſeptimæ tribus &c.
3. Comma ſolitarium per millenarios, lineola transverſa una per milliones, duæ per billiones, tres per trilliones, &c. nota vero ſiniſtima claſſis uniuscujusque per centenarios, media per decades, dextima per unitates enuncietur (§. 35.). *Sic factum eſt, quod petebatur.*

E. gr. Numerus ſequens.

$2''', 125, 473'', 613, 578', 432, 597$
ita enunciatur: Duæ trilliones, centum & viginti quinque millia billionum una cum quadringentis ſeptuaginta tribus billionibus, ſexcenta & tredecim millia millionum una cum quingentis ſeptuaginta octo millionibus, qua-

dringenta & triginta duo millia, quingenta & nonaginta ſeptem.

SCHOLION.

37. *Quantum conveniens terminorum uſus in rebus diſtincte concipiendis, ſeu ex confuſione extricandis vires intellectus humani extendat; abunde perſpicient oculatiores, ſi ad præſens problema fuerint ſatis attenti.*

HYPOTHESIS VI.

38. *Quantitates aut numeros indeterminatos literis Alphabeti minoribus a, b, c &c vel etiam majoribus A, B, C &c. indigitamus.*

HYPOTHESIS VII.

39. *Fractiones per duos numeros exprimuntur, quorum alter alteri interjecta lineola ſubſcribitur. Eorum inferior, ſeu* Denominator, *indicat unitatem ſeu totum in partes diviſum; ſuperior vero, ſeu* Numerator, *numerat partes in caſu propoſito datas.* E. g. Duæ partes tertiæ unius lineæ ita ſcribuntur $\frac{2}{3}$: ubi denominator 3. indicat, lineam eſſe in tres partes æquales diviſam; numerator 2. vero duas iſtiusmodi partes aſſignat.

DEFINITIO XIX.

40. *Additio* eſt inventio alicujus numeri ex duobus vel pluribus homogeneis

neis datis, qui datis junctim sumtis æqualis est. Numeri dati dicuntur *summandi*; quæsitus autem *summa* vel *aggregatum*.

COROLLARIUM.

41. Iterata ergo ejusdem numeri additio est inventio numeri alteri cuidam aliquoties sumto æqualis & contra.

HYPOTHESIS VIII.

42. *Signum additionis est* +, *quod per* plus *efferri solet*. Ita 3 + 4 denotat Summam ex 3 atque 4, & pronunciatur: 3 plus 4.

DEFINITIO XX.

43. *Subtractio* est inventio alicujus numeri ex duobus homogeneis datis, qui cum uno datorum alteri æqualis est. Numerus, qui subducitur dicitur *Subtrahendus*; alter, a quo subtractio fit, *Minuendus*; qui denique invenitur, *Differentia*, a nonnullis *Residuum*.

HYPOTHESIS IX.

44. *Signum Subtractionis est* –, *quod per* minus *efferri solet*. E. gr. 7–3 denotat differentiam inter 3 & 7, pronunciatur: 7 minus 3.

DEFINITIO XXI.

45. *Multiplicatio* eſt inventio alicujus numeri ex duobus datis, in quo toties continetur datorum unus, quoties unitas in altero. Numeri dati dicuntur *Factores*, item *efficientes;* quæſitus *Factum*, item *Productum.* In ſpecie factorum alter, qui aliquoties ſumitur, vocatur *Multiplicandus;* alter vero, qui indicat, quoties ille ſumatur, *Multiplicator.*

COROLLARIUM.

46. Quoniam itaque in multiplicatione numerus invenitur alteri cuidam aliquoties ſumto æqualis (§. 45.), iſtiusmodi autem inventio non eſt niſi iterata additio (§. 41.); multiplicatio eſt iterata ejusdem numeri additio.

HYPOTHESIS X.

47. *Signum multiplicationis eſt punctum unicum* (.) *inter factores duos medio loco poſitum, quod per* multiplicatum *effertur.* E. gr. 4. 3. denotat factum ex 4 in 3; item 7. 5. 9 factum, cujus factores ſunt 7, 5 & 9. *Litteræ ſine ullo ſigno junguntur.* E. gr. *ab* denotat factum ex *a* in *b.*; *b c d* factum, cujus factores *b*, *c* & *d.*

DEFINITIO XXII.

48. *Diviſio* eſt inventio alicujus numeri ex duobus datis, in quo toties continetur

tine-

tinetur unitas, quoties datorum unus in altero. Numerus, qui dividi debet, *dividendus*; alter, per quem fit divisio, *divisor*; qui denique indicat, quoties divisor in dividendo contineatur, *Quotus* dicitur.

SCHOLION I.

49. *In multiplicatione & divisione opus non est, ut numeri dati sint homogonei, quemadmodum in additione & subtractione requirebatur* (§. 40. 43.)

HYPOTHESIS XI.

50. *Signum divisionis sunt duo puncta* (:) *quæ per divisum efferri solent.* E. gr. 8: 4 denotat quotum ex divisione 8 per 4 emergentem Similiter *a*: *b* est quotus ex divisione *a* per *b* prodiens.

DEFINITIO XXIII.

51. *Numerus par* est, qui bifariam sive per 2 dividi potest, ut 4, 12, 16.

DEFINITIO XXIV.

52. *Numerus impar* est, qui a pari unitate differt, ut 3 differt unitate a 2, item a 4.

DEFINITIO XXV.

53. Numerus A *metiri* vel juxta alios *numerare* dicitur numerum B, si eum ita dividit, ut quotus sit numerus integer sine fractione, vel si fuerit pars ejus aliquota. Ita 2 metitur 8 per 4.

DEFINITIO XXVI.

54. *Numerus primus in se* eſt, quem ſola unitas metitur, vel numerat, ut 5, 7, 11.

DEFINITIO XXVII.

55. *Numerus compoſitus* eſt, quem præter unitatem alius numerus metitur. Ita 4 metitur 8 per 2, item 2 metitur 8 per 4.

DEFINITIO XXVIII.

56. *Menſura numeri* eſt numerus, qui ipſum metitur. Ita 2 & 4 ſunt menſuræ numeri 8. *Menſura maxima numeri* eſt numerus maximus, qui ipſum metitur. Ita 4 eſt menſura maxima numeri 8.

DEFINITIO XXIX.

57. *Menſura communis duorum pluriumve numerorum* eſt numerus, qui ſingulos ſigillatim metitur. Ita 3 eſt communis menſura numerorum 12 & 24. *Maxima* dicitur, ſi fuerit numerus maximus, qui omnes metitur. Ita 12 eſt communis menſura maxima numerorum 12 & 24, 3 vero numerorum 9 & 12.

DEFINITIO XXX.

58. *Numeri primi inter ſe* ſunt, qui nullam communem menſuram habent,

præ-

præter unitatem. Ita 12 & 19 ſunt numeri primi inter ſe.

DEFINITIO XXXII.

59. *Numeri compoſiti inter ſe* ſunt, qui præter unitatem communem menſuram aliam habent. Ita 12 & 15 ſunt compoſiti inter ſe.

AXIOMA I.

60. *Idem eſt æquale ſibimetipſi.*

SCHOLION.

61. *Hujus axiomatis ampliſſimus eſt in Analyſi uſus.*

AXIOMA II.

62. *Quantitates homogeneæ aut æquales ſunt aut inæquales* (§. 12.)

AXIOMA III

63. *Totum eſt majus qualibet ſua parte.*

AXIOMA IV.

64. *Totum eſt æquale omnibus ſuis partibus ſimul ſumtis.*

AXIOMA V.

65. *Quæ æqualia ſunt eidem tertio, vel æqualibus æqualia; ea ſunt æqualia inter ſe.*

AXIOMA VI.

66. *Si æqualibus (A & B) æqualia (C & D) addas, aggregata (A + C & B + D) ſunt æqualia.*

AXIOMA VII.

67. *Quod uno æqualium majus vel minus eſt, etiam altero æqualium majus vel minus eſt.*

AXIOMA VIII.

68. *Si majori (B) & minori (A) idem (C) vel æqualia addas, aggregatum prius (B+C) majus eſt, poſterius vero (A+C) minus. Quodſi majori (B) majus (C) & minori (A) minus (D) addas, aggregatum prius (B+C) majus eſt; poſterius (A+D) minus.*

AXIOMA IX.

69. *Si æqualia (A & B.) ab æqualibus (C & D) ſubtrahas, quæ relinquuntur (C-A & D-B) æqualia ſunt.*

AXIOMA X.

70. *Si a majore (A) & minore (B) idem (C) vel æqualia ſubtrahas; reſiduum prius (A-C) majus eſt; poſterius (B-C) minus.*

AXIO-

AXIOMA XI.

71. *Si æqualia (A & B) per æqualia (m & n) multiplices; facta (m A & n B) æqualia sunt.*

AXIOMA XII.

72. *Si æqualia (A & B) per æqualia (C & D) dividas, quoti (A: C & B: D) æquales sunt.*

CAPUT II.

DE SPECIEBUS ARITHMETICÆ IN NUMERIS INTEGRIS.

PROBLEMA II.

73. *Numeros quotcunque datos addere.*

RESOLUTIO.

1. Numeri homogenei ſub homogeneis, hoc eſt, ita ſcribantur, ut unitates unitatibus, decades decadibus, centenarii centenariis &c. reſpondeant.
2. Sub iis ducatur linea recta, ne aggregatum cum aggregandis confundatur.
3. Sigillatim addantur unitates & ſumma earum ipſis ſubſcribatur.

4. Quod-

4. Quodſi in ea decades reperiantur, eas decadibus numerorum datorum addi oportet: decadum vero ſumma ſub decadibus collocanda.
5. Hac operatione per reliquas numerorum datorum ſeries continuata habebitur ſumma quæſita.

E. g. Si numeri A, B, C addendi; ita procedendum: 4 & 3 ſunt 7, additis 8, prodeunt 15. Collocentur 5. ſub unitatibus, & 1 decas connumeretur decadibus datis. Itaque 1 (ſc. *decas*) & 6 (*decades*) ſunt 7. (*decades*): additis 2, prodeunt. 9; additis porro 7 habentur 16 (*decades*). Collocentur 6 ſub decadibus datis, & reliquæ 10, hoc eſt, 1 centenarius annumeretur centenariis datis. Sunt itaque 1 & 5 (*centenarii*) 6. &, additis adhuc 5 prodeunt 11 (*centenarii*). Collocetur 1 ſubcentenariis datis & 10 centenarii reliqui, hoc eſt, 1 millenarius addatur 3 *millenariis* datis, ſummaque 4 ſub iis ſcribatur. Ita prodit ſumma quæſita 4165.

3578A
524B
63C
4165

DEMONSTRATIO.

Cum unitates, decades, centenarii, millenarii &c. numerorum datorum ſint partes eorundem (§. 35.); idem ſunt cum omnibus numeris datis ſimul ſumtis (§. 6.) Liquet vero ex operatione, numerum inventum compoſitum eſſe ex omnibus unitatibus, decadibus, centenariis, mille-

lenariis &c. numerorum datorum. Compositus ergo eſt ex omnibus numeris datis ſimul ſumtis, conſequenter ipſis æqualis (§. 64.), adeoque ſumma eorundem eſt (§. 40.). *Q. e. d.*

SCHOLION.

74. *Nec abſimili artificio numeri heterogenei adduntur. Ex ſerie nimirum ſpeciei minoris toties colligitur valor ſpeciei proxime majoris, quoties fieri poteſt & pro unoquoque unitas reponitur in ſerie proxime majore. E. gr. ſint expenſæ:*

Januarii	45thal.	16groſs.	9num.
Februarii	60	12	3
Martii	72	13	6
Aprilis	180	19	9
Maji	55	15	6
erit ſumma	415	5	9

Cum enim 12 nummi conficiant groſſum, in ſerie nummorum additis 6 & 6, itemque 3 & 9 valor groſſi bis colligitur & relinquuntur 9. Scribuntur itaque 9 infra lineam in loco nummorum & 2 adduntur ſeriei groſſorum. Similiter quoniam thalerus 24 groſſis conſtat, in ſerie groſſorum, ut ante valor thaleri ter colligitur, relictis 5. Quare denuo 5 in loco groſſorum reponuntur & 3 thaleris connumerantur. Reliqua ut in problemate peraguntur.

COROLLARIUM I.

75. Si omnes numeri dati unitatum inſtar conſiderentur, evidens, eſt, inter ſummandum

tot

tot novenarios omitti, quot unitates ex summa seriei dexterioris in sinisteriorem transferuntur. Sic in exemplo problematis loco *quindecim* sub unitatibus scribimus 5, sub decadibus 1, quorum numerorum instar unitatum consideratorum summa est 6. Unus itaque novenarius omittitur, cum ex loco unitatum in locum decadum una rejicitur decas. Similiter si summa unitatum *viginti septem*; sub unitatibus collocamus 7, sub decadibus 2. Duo igitur novenarii omittuntur, cum 2 decades ex loco monadum in locum decadum rejiciuntur. Hinc solvitur.

PROBLEMA III.

76. *Examinare additionem, hoc est, explorare utrum numerus inventus sit æqualis omnibus datis simul sumtis, nec ne.*

RESOLUTIO.

1. Notentur a latere numeri. qui inter addendum ex serie qualibet dexteriore in proxime sinisteriorem rejiciuntur, & operatione absoluta addantur, ut numerus novenariorum inter summandum omissorum innotescat (§. 75.)
2. Abjiciatur præterea ex summa inventa novenarius, quoties fieri potest, abjectorumque novenariorum numerus addatur numero inter summandum omissorum: quæ summa una cum numero residuo, si quis fuerit, probe notetur.

3. Tan-

3. Tandem ex numeris ſummandis, qui omnes tanquam unitates ſpectantur, novenarius abjiciatur, quoties fieri poteſt, & numerus novenariorum abjectorum una cum numero reſiduo, ſi quis fuerit, denuo notetur.

Quodſi enim uterque fuerit æqualis utrique ante reperto; numerus inventus æquatur omnibus datis ſimul ſumtis (§. 69.); conſequenter additio rite peracta (§. 40.). *Q. e. i. & d.*

E. gr. In exemplo problematis inter ſummandum 3. novenarii omittuntur & ex ſumma reperta unus adhuc deleri poteſt: quo facto, relinquuntur 7. Sed ſi ex numeris ſummandis 4 novenarij abjiciantur, 7 ſimiliter relinquuntur. Quare additio rite peracta.

SCHOLION.

77. *Vulgo præcipiunt, ut tam ex ſumma, quam aggregandis, notis ſingulis inſtar digitorum conſideratis, adjiciatur novenarius, & ex reſidui identitate operationis bonitatem colligunt. Sed cum examen tum fallere poſſit, quando error novenarium vel ejus multiplum adæquat; ideo aliquantiſper idem immutavi, ut hunc quoque excluderet errorem. Ceterum non inutilia ſunt examina, etſi non omnes errores detegant, modo iisdem ſeſe non ſubducant, qui frequentius admittuntur.*

PROBLEMA IV.

78. *Numerum minorem e majore ſubtrahere.*

RESOLUTIO.

1. Numerus minor ea lege majori ſubſcribatur, ut homogenei homogeneis reſpondeant, quemadmodum in additione præcepimus (§. 73.).
2. Sub numeris hiſce ducatur linea recta.
3. Subtrahantur ſigillatim unitates ab unitatibus, decades a decadibus, centenarii a centenariis &c. & reſidua ſingula loco conveniente infra lineam ſcribantur, nempe reſiduum unitatum ſub unitatibus, decadum ſub decadibus &c.
4. Quod ſi nota major e minore veniat ſubtrahenda, ex ſiniſteriore loco in dexteriorem transferatur unitas, quæ (§. 35.) hic 10 valebit, ut ſubtractio fieri queat. Numerus vero unitate mulctatus puncto notetur, ne ipſum mulctatum eſſe obliviſcamur,
5. Si in loco ſiniſteriore cyphram repeririri contingat, unitas a numero proxime ſequente mutuetur, puncto propterea notando, ut ipſum unitate minutum eſſe conſtet. Unitas vero illa in locum dexteriorem translata decadis valorem tuebitur (§. 35.). Quamobrem ubi plures cyphræ ſeſe inſequuntur, omnes hac ratione in novenarios mutentur, & numerus minor, a quo ſubtractio fieri debet, decade augeatur.

Juxta

Juxta has regulas numerum quemcunque ex alio quocunque majore ſubtrahere licet.

E. gr. Si ex	9 8. 0. 0. 4. 0. 3 4. 5 9
ſubtrahas	4 7 4 3 8 6 5 2 6 3
Differentia eſt	5 0 5 6 5 3 8 1 9 6

Demtis enim 3 ex 9, relinquuntur 6 unitates infra lineam ſcribendæ. Decades 6 ex 5 auferri nequeunt: a centenariis itaque 4 auferatur unus & ejus loco decem decades decadibus jungantur. Ablatis itaque 6 ex iis, remanent 9 decades infra lineam loco conveniente ponendæ. Centenarii 2 ex 3 ſubducti relinquunt 1. Millenarii 5 ex 3 auferri nequeunt: a centenariis itaque millenariorum 4 auferatur unus, qui in locum vacuum delatus cyphram in decem decades millenariorum vertet. Inde ſi 1 decadem in locum millenariorum transferas, habebis hic 13 millenarios, ibi 9 decades millenariorum Subductis jam 5 ex 13, reſidui fiunt millenarii 8 Demtis porro 6 millenariorum decadibus ex 9, relinquuntur 3. Jam, ſi 8 ex 3 ſubtrahere debes, ab 8 ſiniſterioribus mutuetur unitas, cujus beneficio duæ cyphræ in 9 & 3 in 13 degenerabunt, ut tandem ſubtractio facillime abſolvatur.

Demonstratio.

Numerus inventus prodit, ſi unitates, decades, centenarios &c. numeri minoris ex unitatibus, decadibus, centenariis &c. majoris ſubducas, *vi operationis,*

nis, hoc eſt, ſi ſingulas partes numeri minoris a ſingulis partibus majoris ſubtrahas (§. 35.). Sed ſingulæ partes numeri minoris ſimul ſumtæ ſunt numero minori, & partes ſingulæ majoris ſimul ſumtæ ſunt majori æquales (§. 64.). Ergo idem relinqui debet numerus, ſi totum numerum minorem a toto majore ſubtrahas (§. 69. *Q. e. d.*

SCHOLION I.

79. *Si numeri heterogenei fuerint a ſe invicem ſubtrahendi; unitas mutuo petita non* 10, *ſed tot unitates valet, quot unitates ſpeciei minoris conſtituunt valorem unitatis ſpeciei majoris.*

E.	gr. 45. thal.	16. gr.	6. num.
	27	23	9
	17 thal.	16 gr.	9 num.

Nimirum cum 9 *nummi ex* 6 *ſubtrahi nequeant, ex* 16 *groſſis unus convertitur in* 12 *nummos, ut loco* 6 *habeantur* 18. *Subductis adeo* 9 *nummis ex* 18. *relinquuntur* 9. *Similiter cum* 23 *groſſi ex reſiduis* 15 *auferri nequeant; ex* 45 *thaleris unus ablatus in* 24 *groſſos convertitur: unde ſi ſubtrahantur* 23, *reſiduus eſt* 1 *groſſus* 15 *addendus, ut reſidui loco ponantur* 16 *groſſi. Denique* 27 *thaleri a* 44 *ablati relinqunt* 17.

SCHOLION II.

80. *Quod ſi numerus major e minore ſubtrahi jubeatur, evidens eſt, id fieri non poſſe. Subtrahitur itaque minor e majore, & defectus notatur ſigno—.*

no—. E. gr. Si quis 8 thaleros solvere debet, atque 3 nonnisi possidet: tribus solutis 5 adhuc debet, qui per — 5 indigitantur.

Problema V.

81. *Examinare subtractionem.*

Resolutio.

Residuo addatur subtrahendus (§. 73.). Quodsi enim summa fuerit æqualis minuendo: subtractio rite peracta (§. 43.).

E. gr.	
9800403459	Minuendus.
4743865263	Subtrahend.
5056538196	Differentia.
9800403459	

Problema VI.

82. *Examinare additionem per subtractionem*

Resolutio.

1. Describantur in continua serie multipla Septenarii centenario inferiora, nempe 7. 14. 21. 28. 35. 42. 49. 56. 63. 70. 77. 84. 91. 98. continua Septenarii additione invenienda. Est enim 7+7=14. 14+7=21 &c.
2. In exemplo ad examinandum proposito, veluti

```
 566
8259
 526
2687
----
3425
10946
```

 suman-

ſumantur in aggregato binæ notæ finiſtimæ 10, & cum multiplis ſeptenarii conferantur.

3. Multiplum proxime inferius, aut ipſe ſeptenarius, veluti in noſtro caſu, ab iſtis notis ſubtrahatur & reſiduum 3 iisdem ſuperſcribatur.

4. Juncta huic reſiduo 3 nota proxime ſequente 9, numerus inde reſultans 39 conferatur ut ante cum ſeptenarii multiplis, & proxime minori 35 inde ſubducto, reſiduum 4 ſupra ſcribatur.

5. Hæc operatio continuetur, donec reſiduum ultimum 5 ſuper nota dextima obtineatur.

6. Singulæ aggregandorum ſeries 2687 & 8259 eodem modo tractentur.

7. Reſidua ſuper notis dextimis 6 & 6 addantur, & a ſumma 12 ſeptenarius vel ejus multiplum proxime inferius abjiciatur.

Quodſi reſiduum fuerit idem cum reſiduo ſuper nota dextima aggregati, velut in noſtro exemplo 5; operatio rite peracta.

DEMONSTRATIO

Ad operationem attento manifeſtum eſt tum ex aggregato, tum ex aggregandis abjici omnia multipla ſeptupli, e. gr. in noſtro caſu millenariorum, centenariorum, decadum, unitatum. Jam cum aggregatum ſit aggregandis æquale §. 40.), omnia quoque iſta multipla junctim ſumta

utro-

utrobique æqualia esse debent (§. 64. 65.). Cum adeo ab æqualibus æqualia auferantur; residua omnino æqualia sint necesse est (§. 69.). Quare si contingat, inæqualia residua fieri; id indicio erit, si examen rite institutum, errorem in operatione admissum fuisse. *Q. e. d.*

PROBLEMA VII.

83. *Abacum Pythagoricum, hoc est, Tabulam construere, in qua facta ex singulis digitis in singulos repræsentantur.*

RESOLUTIO.

1. Latera quadrati alicujus singula in 9 partes æquales dividantur & per lineas ipsi parallelas in areolas quadratas area ejus resolvatur.
2. In serie horizontali summa & laterali sinistima scribantur novem notæ numericæ, seu singuli digiti
3. Addantur 2 & 2; aggregatum 4 scribatur infra 2. Addantur porro 2 & 4; aggregatum 6 collocetur sub 4. Addantur 2 & 6, aggregatum 8 ponatur 6; & ita porro.
4. Quodsi hæc additio per reliquos digitos eadem lege continuetur, Abacus Pythagoricus construetur. *Q. e. f.*

ABACUS PYTHAGORICUS.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

SCHOLION.

84. *Abacum Pythagoricum memoriæ mandare tenetur multiplicationem ac divisionem expedite absoluturus. Quamdiu vero memoriæ infixus non est, ad manus esse debet, quoties multiplicas aut dividis.*

PROBLEMA VIII.

85. *Numerum quendam datum per alium datum multiplicare.*

RESOLUTIO

1. Multiplicator scribatur sub multiplicando, ut in additione (§. 73.)
2. Ducatur sub iis linea recta.
3. Infra hanc ex abaco Pythagorico scribantur singula producta ex singulis multiplicandi notis in unitates mul-

multiplicatoris, similiter ex illis in reliquas hujus notas, ea quidem lege, ut decades cujuslibet producti annumerentur producto proxime sinisteriori, & productum ex multiplicando in decades multiplicatoris in loco decadum, productum ex multiplicando in centenarios multiplicatoris in loco centenariorum &c. scribere incipiamus.

4. Producta partialia addantur (§. 73.). Dico aggregatum esse factum quæsitum.

E. gr. Sint factores 38476 & 35. Multiplicatore sub multiplicando scripto, duc 5 in 6, cumque factum, vi abaci Pythagorici, sit 30, scribe 0 sub 5 & 3 decades annumera facto ex 5 in 7. quod est 35. Additis itaque 3 ad 35, prodeunt 38. Pone 8 juxta 0 versus sinistram & facto ex 5 in 4, nempe 20, adde 3, ut prodeant 23 (scilicet centenarii). Scribe itaque 3 in loco centenariorum & 2 millenarios annumera facto 40 ex 5 in 8, ut habeatur summa 42 millenariorum, Scribe 2 in loco millenariorum; 4 vero decades millenariorum adde facto 15 ex 5 in 3, & summam 19 in loco conveniente repone. Ita habetur factum ex multiplicando in dexteram multiplicantis notam. Quodsi eadem ratione quæratur factum ex multiplicando

```
  38476
     35
-------
 192380
 115428
-------
1346660
```

in finiſtram multiplicatoris notam 30 & producta partialia addantur; prodibit tandem factum ex 35 in 38476, nempe 1346660.

DEMONSTRATIO.

Vi operationis & Abaci Pythagorici primus numerus intra lineas ſcriptus ſingulas multiplicandi notas, hoc eſt, ſingulas ejusdem partes (§. 35.), adeoque multiplicandum ipſum (§. 6.) toties continet, quoties prima multiplicatoris nota unitatem. Eodem modo patet, quod numerus ſecundus intra lineas ſcriptus multiplicandum toties contineat, quoties nota ſecunda multiplicantis unitatem &c. Sed cum numeri intra lineas ſcripti adduntur, ſumma iisdem æqualis eſt (§. 40.), adeoque multiplicandum toties continet, quoties ſingulæ multiplicatoris notæ, hoc eſt, partes (§. 35.), conſequenter totus multiplicator (§. 6.) unitatem continet. Eſt igitur factum ex multiplicando in multiplicantem (§. 45.) Q. e. d.

SCHOLION.

86. *Si factoribus* cyphræ *adhæreant, producto invento eædem adjunguntur, ut ex ſequentibus exemplis manifeſtum.*

3578	4760
30	2000
107340	9520000

PRO-

PROBLEMA IX.

87. *Numerum datum per alium minorem dividere.*

RESOLUTIO.

Caſus I. Si diviſor unica fuerit nota,

1. Scribatur is ſub nota dividendi siniſtima, aut, ſi ea minor fuerit, ſub proximo ſequente, ac ope *Abaci Pythagorici* inveſtigetur, quoties in nota vel notis ſupraſcriptis contineatur. Numerus, qui hoc indicat, ponatur dexteram verſus poſt lunulam loco quoti.
2. Quotus ducatur in diviſorem & productum ex nota vel notis ſupraſcriptis dividendi ſubtrahatur, & his deletis, ſi quod fuerit reſiduum, ſupraſcribatur.
3. Diviſor ad notam ſubſequentem verſus dexteram promoveatur, & ope *Abaci Pythagorici* denuo inveſtigetur, quoties in notis ſupraſcriptis contineatur. Reliqua peragantur ut ante.
4. Quodſi hæc operatio per ſingulas dividendi notas continuetur, quotus invenietur. *Q. e. f.*

E. gr. Sit dividendus 7856, diviſor 3. Ponantur 3 ſub 7 & per *abacum Pythagoricum* innoteſcit, 3 in 7 bis contineri. Scribantur ergo 2 poſt lunulam loco quoti & factum ex 2 in 3, hoc eſt 6, ſubtrahatur ex 7 lineola trans-

```
1 22
7856 ( 2618⅔
3333
```

ver-

verſa delendis, reſidua unitas ſupraſcribatur. Promoveatur diviſor 3 ſub 8, cumque vi *abaci Pythagorici* 3 in 18 ſexies contineatur, ſcribantur 6 loco quoti & factum 18 ex 3 in 6 ex 18 ſubducatur: quo in caſu nihil relinquitur. Quodſi eadem ratione pergatur, quotus tandem integer prodit 2618, & binarius 2 remanet: id quod indicio eſt numerum propoſitum in tres partes æquales exacte dividi non poſſe.

DEMONSTRATIO.

Ex ipſa operatione liquet, numerum inventum indicare, quoties diviſor in millenariis, centenariis, decadibus, unitatibus dividendi, hoc eſt, in ſingulis ejus partibus (§. 35.), adeoque in toto dividendo (§. 6.) contineatur, conſequenter unitatem toties continet, quoties dividendus diviſorem. Eſt igitur quotus (§. 48.) *Q. e d.*

Caſus II. Si diviſor ex notis pluribus conſtet,

1. Siniſtima ejus nota ſcribatur ſub nota ſiniſtima dividendi & reliquæ dexteriores ſub proxime ſequentibus verſus dexteram.
2. Ope *abaci Pythagorici* inveſtigetur, quoties prima diviſoris nota in prima dividendi contineatur.
3. Numerus inventus ducatur in diviſorem integrum & diſpiciatur, utrum

factum

factum ex numeris ſupraſcriptis ſubtrahi poſſit, nec ne.

4. Si ſubtractio fieri queat, ſcribatur is loco quoti poſt lunulam & ſubtractio actu peragatur. Numeri, ex quibus ſubtractio fit, lineola transverſa deleantur, & qui reſidui fuerint, ſupraſcribantur. Quodſi vero ſubtractio non ſuccedat, loco quoti ſumatur numerus unitate vel aliquot unitatibus minor, donec factum ex eo in diviſorem ad notas dividendi quam proxime accedat & ex iis auferri queat.
5. Diviſor loco uno verſus dexteram promoveatur & reliqua ut ante peragantur.
6. Hæc operatio continuetur, donec diviſor ulterius promoveri nequeat. *Sic f. e. q. p.*

E. gr. Si dividendus 7856, diviſor 32. Scribantur 32 ſub 78 & inquiratur, quoties 3 in 7 contineantur. Cum itaque bis in eo contineantur; ducantur 2 in 32 &, quia factum 64 ex 78 ſubtrahi poteſt, 2 ſcribantur poſt lunulam &, ſubtractione peracta reſiduisque 14 ſupraſcriptis, diviſor loco uno promoveatur. Quo facto inveſtigetur, quoties 3 in 14 contineantur & factum ex 4 in 32, hoc eſt 128, ſubducatur ex 145, reſiduo

```
1 1
147
7856 ( 245 16/32
3222 (
 33
```

ſiduo 17 ſupraſcripto & 4 in loco quoti poſt lunulam repoſitis. Promoveatur diviſor denuo loco uno & quæratur, quoties 3 in 17 contineantur. Numerus 5, qui hoc indicat, jungatur quoto jam invento, & factum ex eo in diviſorem 32, nempe 160 ſubtrahatur ex 176, reſiduo 16 ut ante ſupraſcripto. Dico numerum inventum $245\frac{16}{32}$ eſſe quotum quæſitum.

Si diviſor ex pluribus præſertim conſtet notis, præſtat multipla quoti ſubtrahenda ſub notis dividendi, ex quibus ſubtractio fieri debet, immediate ſcribi & ſub ſubtrahendo reſiduum, cui continuandæ diviſionis gratia jungitur nota dividendi ſequens, donec nulla ſuperfuerit, adeoque diviſio abſoluta.

E. gr. Sit dividendus 385797, diviſor 8672, quem tibi ſub loco quoti notabis. Iam cum 8 in 38 quater contineatur, ſcribe diviſoris 8672 quadruplum ſub notis dividendi 38479, & reſiduum 3891 ſub eodem juncta eidem nota ſequente 7, ut diviſio continuari poſſit. Quoniam itaque diviſor in notis 38917 denuo 4 continetur, quadruplum diviſoris ut ante ſub iisdem ponitur & ex ipſis aufertur. Erit $44\frac{4229}{8672}$ quotus.

```
385797 ( 44
34688  ( 8672
------
 38917
 34688
 -----
  4229
```

Dᴇ-

DEMONSTRATIO.

Eadem fere eſt demonſtratio, quæ in caſu primo, hoc unice notato, quod, cum ex *abaco Pythagorico* conſtare nequeat, quoties diviſor integer in notis dividendi ſupraſcriptis contineatur, interea ſupponatur, toties illum in his contineri, quoties ſiniſtima diviſoris nota continetur in ſiniſtima aut duabus ſiniſtimis dividendi notis. Licet enim hæc ſuppoſitio ſubinde fallat, in errorem tamen inducere nequit, quia examen mox inſtituitur, cum factum ex diviſore in quotum juxta eam inventum cum dividendo comparatur, & pſeudoquotus unitate tamdiu minuitur, donec in verum abeat.

PROBLEMA X.

88. *Examinare multiplicationem.*

RESOLUTIO.

Dividatur factum per multiplicandum, quotus erit multiplicans; aut factum dividatur per multiplicantem, quotus erit multiplicandus, ſi multiplicatio rite fuerit peracta.

```
      )13.466.60(35
38476)11 5428
       ———————
       1 9 2380
       1 9 2380
       ———————
       00 0000
```

E. gr. Si multiplicandus 38476, multiplicator 35.; factum est 1346660 (§. 85.) Si vero 1346660 per 38476 dividas, quotus est 35.

PROBLEMA XI.

89. *Examinare divisionem.*

RESOLUTIO.

1. Quotus ducatur in divisorem, aut divisor in quotum.
2. Facto addatur, si quod a divisione fuerit residuum.

Quodsi hac ratione prodeat dividendus, divisio legitime peracta. (§. 146.

```
 245
  32
————
 490
735
————
7840
  16
————
7856
```

E. gr. Si 7856 dividas per 32, quotus est 245, residuum 16. Duc 245 in 32 &' facto 7840 adde 16; habebis dividendum 7856. Constat igitur, divisionem legitime fuisse peractam.

CA-

CAPUT III.
DE RATIONE AC PROPORTIONE QUANTITATUM.

Definitio XXXII.

90. *Ratio* eſt ea homogeneorum relatio, quæ quantitatem unius determinat ex quantitate alterius, ſine tertio homogeneo aſſumto. Homogenea, quæ comparantur, dicuntur *Termini Rationis*, & in ſpecie *Antecedens* vocatur, qui ad alterum refertur; *Conſequens* vero ad quem alter refertur.

Scholion I.

91. Euclides *rationem definit per* habitudinem magnitudinum ejusdem generis ſecundum quantitatem. *Sed hæc definitio incompleta: dantur enim & aliæ magnitudinum relationes, quæ ſunt conſtantes, nec tamen in rationum numero continentur. Talis eſt ſinus recti ad ſinum complementi in Trigonometria.*

Scholion II.

92. *Ceterum hic de ratione quantitatum in genere, non tantum de ratione numerorum agimus, quia hæc doctrina non modo ad commenſurabilia, ſed etiam ad*

incommensurabilia, hoc est, ad quantitatum quodvis genus applicari debet.

COROLLARIUM I.

93. Cum in fractionibus relatio numeratoris ad denominatorem sine tertio homogeneo assumto intelligatur (§ 39.); erit ea ratio.

COROLLARIUM II.

94. Si duæ quantitates inter se comparantur sine tertia homogenea assumta, aut una alteri æqualis, aut inæqualis deprehenditur (§. 62.). Ratio itaque vel æqualitatis, vel inæqualitatis.

COROLLARIUM III.

95. Si termini rationis fuerint inæquales, vel minor refertur ad majorem, vel major ad minorem (§. 17.); minor nempe ad majorem tanquam pars ad totum, major vero ad minorem tanquam totum ad partem (§. 16.). Ratio itaque determinat, quoties minus in majore contineatur, vel quoties majus minus contineat, hoc est, quantæ majoris parti minus æquetur: id quod divisio prodit (§. 48.).

DEFINITIO XXXIII.

96. *Ratio majoris inæqualitatis* est, quam habet majus ad minus, e. gr. 6 ad 3. *Ratio* vero minoris *inæqualitatis* est, quam habet minus ad majus, e. gr. 3 ad 6.

DE-

DEFINITIO XXXIV.

97. *Ratio rationalis* dicitur, quæ eſt ut unitas vel numerus rationalis ad numerum rationalem, e. gr. ut 3 ad 4. *Irrationalis* vocatur, quæ numeris rationalibus exprimi nequit.

DEFINITIO XXXV.

98. *Exponentem rationis* dico Quotum, qui ex diviſione antecedentis per conſequentem emergit. E, gr. Rationis 3 ad 2 exponens eſt $1\frac{1}{2}$; ſed rationis 2 ad 3 eſt $\frac{2}{3}$. Vocatur is etiam *Donominator*, nec non *Nomen rationis.*

COROLLARIUM I.

99. Si conſequens eſt unitas, antecedens ipſe eſt exponens rationis, e. gr. rationis 4 ad 1 exponens eſt 4.

COROLLARIUM. II.

100. Exponens rationis eſt ad unitatem ut antecedens ad conſequentem (§. 48.).

COROLLARIUM. III.

101. Rationes per exponentes diſcernuntur (§. 95. 98.) atque adeo, ſi antecedens A, conſequens B, ratio ipſius A ad B commode exprimitur per A: B (§. 50.

DEFINITIO XXXVI.

102. Si terminus minor eſt pars aliquota majoris, *Ratio* majoris inæqualitatis

tatis vocatur *multiplex*; *ratio* vero minoris inæqualitatis *submultiplex*. Speciatim in casu primo *dupla*, si exponens 2; *tripla*, si 3. &c. in altero *subdupla*, si exponens $\frac{1}{2}$; *subtripla*, si $\frac{1}{3}$ &c. E. gr. 6 ad 2 habet rationem triplam, continet enim senarius binarium ter; contra 2 ad 6 est in ratione subtripla, continet enim binarius tertiam senarii partem.

DEFINITIO XXXVII.

103. Si terminus major minorem semel continet ac insuper partem ipsius aliquotam; *ratio* majoris inæqualitatis dicitur *superparticularis*, *ratio* minoris inæqualitatatis *subsuperparticularis*. Speciatim in casu primo vocatur *sesquialtera*, si exponens $1\frac{1}{2}$; *sesquitertia*, si $1\frac{1}{3}$ &c. in altero *subsesquialtera*, si exponens $\frac{2}{3}$; *subsesquitertia*, si $\frac{3}{4}$ &c. E. gr. 3. ad 2 est in ratione sesquialtera; 2 ad 3 in subsesquialtera.

DEFINITIO XXXVIII.

104 Si terminus major minorem semel continet ac insuper partes ipsius aliquot aliquotas; *ratio* majoris inæqualitatis vocatur *superpartiens*; *ratio* minoris inæqualitatis *subsuperpartiens*. Speciatim in casu priore dicitur *superbipartiens tertias*, si exponens $1\frac{2}{3}$; *supertripartiens quartas*, si $1\frac{3}{4}$; *superquadripartiens septimas*, si $1\frac{4}{7}$ &c. in posteriore *subsuperbipartiens tertias*, si exponens $\frac{3}{5}$, *subsupertripartiens* quar-

quartas, si $\frac{4}{7}$; *subsuperquadripartiens septimas*, si $\frac{7}{11}$ &c. E. gr. 5 ad 3 est ratio superbipartiens tertias; sed 3 ad 5 ratio subsuperbipartiens tertias.

DEFINITIO XXXIX.

105. Si terminus major minorem aliquoties continet & insuper partem ipsius aliquotam; *ratio* majoris inæqualitatis vocatur *multiplex superparticularis*; ratio minoris inæqualitatis *submultiplex subsuperparticularis*. Speciatim in casu primo dicitur *dupla sesquialtera*, si exponens $2\frac{1}{2}$; *tripla sesquiquarta*, si $3\frac{1}{4}$ &c. in altero *subdupla subsesquialtera*, si exponens $\frac{2}{5}$; *subtripla subsesquiquarta*, si $\frac{4}{13}$ &c. E. gr. 16 ad 5 habet rationem triplam sesquiquintam; 4 ad 9 rationem subduplam subsesquiquartam.

DEFINITIO XL.

106. Denique si terminus major minorem aliquoties continet, ac insuper aliquot partes ipsius aliquotas, *ratio* majoris inæqualitatis dicitur *multiplex superpartiens*; ratio minoris inæqualitatis *submultiplex subsuperpartiens*. Speciatim in casu primo vocatur *dupla superbipartiens tertias*, si exponens $2\frac{2}{3}$; *tripla superquadripartiens septimas*, si $3\frac{4}{7}$ &c. in altero *subdupla subsuperbipartiens tertias*, si exponens $\frac{3}{8}$; *subtripla subsuperquadripartiens septimas*, si $\frac{7}{25}$ &c. E. gr. Ratio 25 ad 7 est tripla superquadripartiens

ſeptimas; 3 ad 8 ſubdupla ſubſuperbipartiens tertias.

SCHOLION

107. *En genera & ſpecies rationum rationalium, quarum quidem nomina apud recentiores rarius occurrunt (eorum enim loco terminis rationum minimis utuntur, e. gr. pro dupla 2 : 1, pro ſesquialtera 3: 2; non tamen ab eo ignorari poſſunt, qui ſcripta Mathematicorum evolvit.*

DEFINITIO XLI.

108. *Rationes eædem* ſunt, quarum antecedentes ad ſuos conſequentes eodem modo referuntur, hoc eſt, quarum antecedentes per ſuos conſequentes diviſi dant exponentes æquales.

COROLLARIUM I.

109. Quoties ergo antecedens unius rationis ſuum conſequentem, vel quantam conſequentis partem continet, toties antecedens alterius ſuum conſequentem, vel tantam conſequentis partem continet: vel etiam quoties antecedens unius in conſequente ſuo continetur, toties antecedens alterius continetur in ſuo conſequente (§. 95.).

COROLLARIUM II.

110. Si fuerit A ad B ut C ad D; erit A : B = C : D, ſeu in exemplo ſingulari 8 : 4 = 30 : 15. Et hoc modo identitatem rationum in poſterum deſignabimus (§. 101.).

SCHO-

SCHOLION

111. *Alii signis aliis utuntur. Communiter A. B : : C. D. scribere solent. Sed secundum leges Artis characteristicæ signa scientifica non scientificis præferri debent. Sunt autem signa scientifica, seu ad inveniendum apta, quæ per characteres derivativos exprimunt, quorum notiones ex aliis simplicioribus componuntur.*

COROLLARIUM. III.

112. Cum rationes non discernantur nisi per exponentes (§. 101.), in rationibus autem iisdem sint exponentes iidem (§. 108.) rationes eædem sunt etiam similes (§. 19.), & contra.

DEFINITIO XLII.

113. Rationum duarum identitas vel similitudo dicitur *Proportio.* Et hinc quantitates eandem rationem habentes dicuntur *proportionales.* E. gr. Si A : B = C : D, dicuntur A, B, C & D, seu 8, 4, 30 & 15 proportionales.

DEFINITIO XLIII.

114. *Proportio continua* est, si consequens primæ rationis idem cum antecedente secundæ; ut si 3 : 6 = 6 : 12; *Discreta* vero si consequens primæ diversus ab antecedente secundæ, ut si 3 : 6 = 4 : 8. In proportione continua *terminus*, qui consequentis primæ & antecedentis secundæ vicem tuetur, *medius propor-*

tionalis appellatur. Ita numerus 6 eſt medius proportionalis inter 3 & 12.

DEFINITIO XLIV.

115. Rationum diverſarum A : B & F : G *major* dicitur A : B, ſi fuerit $A : B > F : G$; contra *minor* F : G, ſi $F : G < A : B$. Unde & rationem majorem ac minorem hoc modo deſignabimus. E. gr. 6 ad 3 majorem habet rationem quam 5 ad 4 nam $6 : 3 \ (= 2) > 5 : 4 \ (= 1\frac{1}{4})$; ſed 3 ad 6 minorem habet quam 4 ad 5, nam $\frac{3}{6} = \frac{1}{2} < \frac{4}{5}$.

DEFINITIO XLV.

116. *Ratio* ex duabas vel pluribus aliis *compoſita* dicitur, quam habet factum ex duarum vel plurium rationum antecedentibus ad factum ex earundem conſequentibus. Ita 6 ad 96 eſt in ratione compoſita 2 ad 8 & 3 ad 12. In ſpecie *duplicata* vocatur, quæ ex duabus; *triplicata*, quæ ex tribus; *quadruplicata*, quæ ex quatuor &c. & in genere *multiplicata*, quæ ex pluribus rationibus ſimilibus componitur, multiplicata nempe uniuscujusque rationum ſimilium. Ita 48 : 3 ſeu 16 : 1 eſt ratio duplicata ipſarum 4 : 1 & 12 : 3. Unde ſimul intelligitur, quænam *ratio* dicenda ſit *ſubduplicata*, *ſubtriplicata*, *ſubquadruplicata*&c. & in genere *ſubmultiplicata*. Nempe 4 : 1 eſt ratio ſubduplicata ipſius 16 : 1 vel 48 : 3.

THEO-

THEOREMA I.

117. *Rationes A: B & F: G similes eidem tertiæ C: D sunt etiam similes inter se: & similibus similes sunt inter se similes.*

DEMONSTRATIO.

Rationes similes eidem tertiæ sunt etiam eædem eidem tertiæ (§. 112.). Quare cum sit A : B = C: D & C : D = F: G (§. 110.); erit A: B = F : G (§. 65.), consequenter A ad B ut F ad G (§. 110.). *Quod erat unum.*

$$6:3 = 8:4$$
$$10:5 = 8:4$$
$$\text{Ergo } 6:3 = 10:5$$

Porro A : B = C : D & F : G = H: E itemque C : D = H : E, *per hypoth.* Sed A : B = H: E, *per demonstr.* Ergo etiam A: B = F : G, *per demonstr. Quod erat alterum.*

THEOREMA II.

118. *Idem C ad æqualia A & B; & æqualia A & B ad idem C, vel etiam æqualia C & D eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

A = B, *per hypoth.* Ergo C: A = C: B (§. 50. 72.), consequenter C ad A & B eandem rationem habet (§. 110.). *Quod erat primum.*

Similiter quia A = B, *per hypoth.* erit A: C = B: C (§. 50. 72.), consequenter

A & B ad C eandem rationem habent (§. 110.). *Quod erat secundum.*

Sit denique A=C & B=D, erit A : B =C : D (§. 50. 72.), consequenter ratio utrobique eadem (§. 110.). *Quod erat tertium.*

THEOREMA III.

119. *Si fuerit A : B=C : D; erit etiam invertendo B : A=D : C.*

DEMONSTRATIO.

Sit quotus ex divisione ipsius A per B emergens E & quotus ex divisione ipsius C per D emergens G; erit B ad A ut unitas ad E & D ad C ut eadem unitas ad G (§. 48.), consequenter B : A=1 : E & D : C=1 : G (§. 110.). Sed A : B=C : D, *per hypoth.* seu E=G (§. 12.). Ergo unitas eadem ad E & G eandem rationem habet (§. 118.), consequenter B : A=D : C (§. 117.). *Q. e. d.*

THEOREMA IV.

120. *Partes similes P & p eandem rationem habent ad tota T & t: si tota ad partes eandem rationem habent, partes sunt similes: & tota ad partes similes eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO

Habeat enim, si fieri potest, P ad T aliam rationem quam *p* ad *t*; partes

p & *P* per diverſitatem rationis ad tota a ſe invicem diſtingui poterunt. Erunt adeo diſſimiles (§. 19.): Quod cum ſit abſurdum, utpote contra hypotheſin; erit P ad T ut *p* ad *t*. *Quod erat unum.*

Cum t : p = T : P, *per hypoth.* erit *p* : *t* = P : T (§. 119.). Ergo *per demonſtrata* P & *p* ſunt partes ſimiles. *Quod erat ſecundum.*

Si P & p ſunt partes ſimiles totorum T & t, erit P : T = *p* : *t per num.* 1. Adeoque T : P = *t* : *p* (§. 119.), hoc eſt, tota ad partes ſimiles eandem rationem habent. *Quod erat tertium.*

THEOREMA V.

121. *Partes ſimiles* P *&* p *ſunt inter ſe ut tota* T *&* t.

DEMONSTRATIO.

Cum totum ſit idem cum partibus ſuis ſimul ſumtis (§. 6.); quoties ſumitur totum, toties etiam ſumitur pars ejus quantalibet, e. gr. quarta, vigeſima, milleſima, millioneſima aut quæ rationem aliam quamcunque ad totum habet. Quare ſi ponamus totum minus *t* toties ſumi, donec toti T æquale fiat; quoties ipſum ſumitur, toties etiam ſumenda ejus pars *p*, donec parti ipſius T ſimili, quæ eſt P, æqualis fiat. Toties itaque P continet *p*, quoties T ipſum *t*. Sunt

ergo

ergo partes ſimiles ut tota (§. 109.). Q. e. d.

THEOREMA VI.

122. *Si* A : B=C : D; *erit etiam* alternando ſeu permutando A : C=B : D.

DEMONSTRATIO.

I. Si antecedentes A & C conſequentibus B & D fuerint minores; eorum partes (§. 16.), eæque ſimiles (§. 120.) haberi poſſunt. Sunt igitur ut tota, hoc eſt, antecedentes A & C eam inter ſe rationem habent, quam conſequentes B & D. (§. 121.).

II. Si antecedentes A & C conſequentibus B & D majores; tum quia A : B =C : D, *per hypoth.* erit B : A=D : C (§. 119.), conſequenter B : D=A : C *per caſ.* I. *Q. e. d.*

COROLLARIUM. I.

123. Ergo in diviſione unitas ad diviſorem ut quotus ad dividendum (§. 48.).

COROLLARIUM II.

124. Si fuerit A : B=C : D, & B=D; erit etiam A=C. Eſt enim A : C=B : D (§. 122.). Sed B=D, *per hypoth.* Ergo A=C (§. 108.).

COROLLARIUM III.

125. Si fuerit B : A=D : C & B=D; erit etiam A=C. Cum enim ſit A : B=C : D (§. 119.); erit etiam A=C (§. 124.).

THEOREMA VII.

126. *Quæ ad idem vel æqualia eandem habent rationem, æqualia ſunt: & ad quæ idem vel æqualia eandem habent rationem ea itidem æqualia ſunt.*

DEMONSTRATIO.

A: B=D: B, *per hypoth.* Ergo A: D =B: B (§. 122.). Sed B=B (§. 60.). Quare A=D (§. 108.). Et idem eodem modo oſtenditur, ſi A: B=D: C & B =C. *Quod erat unum.*

Similiter C: A=C: B, *per hypoth.* Ergo C: C=A: B (§. 122.). Sed C=C (§. 60.). Quare A=B (§. 108.). Et idem eodem modo patet, ſi C: A=D: B & C=D. *Quod erat alterum.*

THEOREMA VIII.

127. *Si quantitates quaſcunque A & B per eandem tertiam C multiplices; facta D & E ſunt inter ſe ut A & B.*

DEMONSTRATIO.

6	12
3	3
18	36

6: 12=18: 36

Cum ſit 1: C=A: D & 1: C=B: E (§. 45); erit A: D=B: E (§. 117.), conſequenter A: B=D: E (§. 122.). *Q. e. d.*

SCHO-

SCHOLION.

128. *Cum C ſit eadem quantitas in utroque caſu, per hypoth. unitas quoque in utroque eadem eſt* (§. 10.) *conſequenter* 1 : *C eadem Ratio.*

COROLLARIUM.

129. Ergo ſi A > B, etiam A C > B C (§. 108.), hoc eſt, ſi majus & minus per idem vel æqualia multiplices, factum prius eſt majus altero.

THEOREMA IX.

130. *Si quantitates quascunque A & B per eandem tertiam C dividas; quoti F & G ſunt inter ſe ut A & B*

DEMONSTRATIO.

$$3)\frac{24:\ 12}{8\quad 4}$$

8 : 4 = 24 : 12

Cum ſit 1 : C = F : A & 1 : C = G : B (§. 123); erit F : A = G : B (§. 117.), conſequenter F : G = A : B (§. 122.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

131. Si A > B etiam F > G (§. 108.), hoc eſt, ſi majus & minus per idem vel æqualia dividas, quotus prior poſteriore major eſt.

THEOREMA X.

132. *Si rationum ſimilium A : B & C, D antecedentes vel conſequentes per idem E dividas, in caſu priore quoti F & G ad conſequentes B & D; in poſteriore*

ante-

antecedentes A & C ad quotos H & K eandem rationem habent.

DEMONSTRATIO.

3 : 6 = 12 : 24	
3 3	
1 : 6 = 4 : 24	

Quoniam A : B = C : D : *per hypoth.* erit A : C = B : D (§. 122.). Sed A : E = F & C : E = G, *per hypoth.* Ergo F : G = A : C (§. 130.), = B : D (§. 117.), consequenter F : B = G : D (§. 122.). *Quod erat unum.*

Similiter quoniam A : B = C : D, *per hypoth.* erit A : C = B : D (§. 122.). Sed B : E = H & D : E = K per *hypoth.* Ergo B : D = H : K (§. 130.), consequenter A : C = H : K (§. 117.) & hinc tandem A : H = C : K (§. 122.). *Quod erat alterum.*

THEOREMA XI.

133. *Si rationum similium A : B & C : D antecedentes vel consequentes per eandem quantitatem E multiplices, in casu priore facta A E & C E ad consequentes B & D, in posteriore antecedentes A & C ad facta B E & DE eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

2 : 6 = 3 : 9	
6 6	
12 : 6 = 18 : 9	

Quia A : B = C : D, *per hypoth.* A : C = B : D (§. 122.). Sed E A : EC = A : C (§. 127.). Ergo EA : EC

Ergo

=B: D:(§. 117 consequenter EA: B= EC: D(§. 122.). *Quod erat unum.*

Eodem modo ostenditur, esse A: BE =C: DE. *Quod erat alterum.*

THEOREMA XII.

134. *Si rationum similium A: B & C: D antecedentes per idem E & consequentes per idem F multiplices aut dividas; in casu priore facta, in posteriore quoti eandem inter se rationem habent.*

DEMONSTRATIO

3: 6=12:24
2: 3= 2: 3
6:18=24:72

A: B=C: D, *per hypoth.* Ergo EA: B= EC: D (§. 133.), consequenter EA: FB= EC: FD (§. *cit*,). *Quod erat unum.*

3:6=12: 24
3:2 3 2
1:3 = 4: 12

Sit A: E=G, B: F= H, C: E=K & D: F =L. Quoniam A: B= C: D, *per hypoth.* G: B =K: D (§. 132.). Ergo & G: H=K:L (§. *cit.*). *Quod erat alterum.*

THEOREMA XIII.

135. *Si fuerint quotcunque rationes similes A: B, C: D, E: F, G: H &c. summa omnium antecedentium A + C + E + G &c. est ad summam omnium consequentium B + D + F + H &c. ut ante-*

tecedens unius rationis A ad ſuum conſequentem B.

DEMONSTRATIO.

Ponamus e. gr. eſſe $A = \frac{1}{2} B$, $C = \frac{1}{2} D$, $E = \frac{1}{2} F$, $G = \frac{1}{2} H$; erit $A + C + E$ $G = \frac{1}{2} B + \frac{1}{2} D + \frac{1}{2} F + \frac{1}{2} H$ (§. 66), hoc eſt, ſumma omnium antecedentium eſt ſubdupla ſummæ omnium conſequentium, conſequenter ut antecedens unius rationis ad ſuum conſequentem. Eodem modo cum argumentatio procedat, ſi alia quæcunque ratio antecedentium ad conſequentes ponatur, vel etiam antecedentes ſint conſequentibus majores: patet propoſitum. *Q. e. d.*

THEOREMA XIV.

136. *Si fuerit ut totum A + C ad totum B + D, ita ablatum C ad ablatum D: erit etiam reliquum A ad reliquum B ut totum A + C ad totum B + D, vel ut ablatum C ad ablatum D.*

DEMONSTRATIO.

24 : 12
6 : 3
———
18 : 9

Aut A : B = C : D, aut A : B > C : D, aut denique A : B < C : D (§. 17.). Ponamus A : B > C : D. Ergo pars ipſius A, quæ dicatur F, erit ad B ut C ad D hoc eſt, F : B = C : D (§. 110.), conſequenter F + C : B + D = C : D (§. 135.). Quare cum etiam

ſit $A+C : B+D = C : D$, *per hypoth.* erit $F+C = A+C$ (§. 126.), adeoque $F = A$ (§. 69.). Sed F eſt pars ipſius A *per hypoth*: Pars igitur toti æqualis quod cum ſit abſurdum (§. 63.), ut ſit $A : B > C : D$, fieri nequit.

Sit jam $A : B < C : D$. Ergo majus ipſo A, quod dicatur G, ad B eandem rationem habet, quam C ad D, hoceſt $G : B = C : D$ (§. 110.), conſequenter $G+C : B+D = C : D$. (§ 135.). Quare cum etiam ſit $A+C : B+D = C : D$, *per hypoth.* erit $G+C = A+C$ (§. 126.), adeoque $G = A$ §. 69.). Sed A eſt pars ipſius G *per hypoth.* Ergo pars toti æqualis: quod cum ſit abſurdum (§. 63.), ut ſit $A : B < C : D$ fieri nequit. Quoniam itaque nec $A : B > C : D$ nec $A : B < C : D$ *per demonſtrata*: erit utique $A : B = C : D$, conſequenter etiam $A : B = A+C : B+D$ (§. 117.). *Q. e. d.*

THEOREMA. XV.

137. *In rationibus ſimilibus $A : B$ & $C : D$ differentia antecedentium $A-C$ eſt ad differentiam conſequentium $B-D$, ut antecedens rationis utriuslibet ad ſuum conſequentem.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam $A : B = C : D$ *per hypoth.* erit $A : C = B : D$ (§. 122.). Ponamus $A > C$ & $B > D$; erunt A & B tota, C & D eorum partes (§. 6. 16.). Quamobrem

cum

cum ſit A : B = C : D, *per hypoth.* erit A—C : B—D = A : B vel = C:D (§. 136.). *Q. e. d.*

THEOREMA XVI.

138. *Si fuerit* ordinate *ut antecedens primæ rationis A ad ſuum conſequentem B, ita antecedens ſecundæ D ad conſequentem ſuum E; & ut conſequens primæ B ad aliud quidpiam C, ita conſequens ſecundæ E ad aliud quidpiam F: erit* ex æquo *antecedens primæ A ad C. ut antecedens ſecundæ D ad F.*

DEMONSTRATIO.

4 : 2 = 6 : 3
2 : 8 = 3 : 12
4 : 8 = 6 : 12

Quoniam A : B = D : E & B : C = E : F, *per hypoth.* erit A : D = B : E & B : E = C : F (§. 122.), conſequenter A : D = C : F (§. 117). Quare A : C = D : F (§. 122), *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

139. Quodſi fuerit A : B = C : D & A:F = C : G; cum etiam ſit B : A = D : C. (§. 119.), erit B : F = D : G (§. 138.).

COROLLARIUM II.

140. Si denique fuerit A : B = C : D & F :A = G : C, cum etiam ſit A : F = C : G (§. 119.) erit B : F = D : G (§. 139.).

THEOREMA XVII.

141. *Duæ quantitates ſe mutuo multiplicantes idem factum gignunt.*

DEMONSTRATIO.

4 2	Sint duo factores A & B,
2 4	erit 1 : A=B : AB & 1:B=A:
——	BA (§. 48.). Eſt vero etiam
8=8	1:A=B:BA (§. 122.), adeoque

ob unitatem eandem, *per hypoth.* B : AB=B : BA (§. 117.). Ergo AB=BA (§. 126.).

COROLLARIUM

142. Sint tres factores A, B & C. Quoniam AB=BA (§. 141.); erit CAB =CBA (§. 71.), adeoque & ABC=BAC (§. 141.). Similiter quia CB=BC (§. 141.); erit ACB =ABC (§. 71.), adeoque & CBA=BCA (§. 141.). Et quia AC=CA (§. 141.), erit BAC=BCA (§. 71.), adeoque ACB= CAB (§. 141.). Quare CAB=CBA= BCA=BAC=ABC=ACB (§. 65.), hoc eſt, factum idem producitur, quocunque ordine efficientes in ſe invicem ducantur.

SCHOLION

143. *Idem eodem modo oſtenditur, ſi plures fuerint factores: ſed demonſtratio prolixior evadit, ſi plures tribus fuerint termini.*

THEO-

THEOREMA XVIII.

144. *Si factum per multiplicandum dividitur, quotus est multiplicans: si per multiplicantem, quotus est multiplicandus.*

DEMONSTRATIO.

Est enim multiplicandus ad factum ut unitas ad multiplicantem (§. 45.). Est etiam multiplicandus ad factum (si hoc per illum dividi concipimus) ut unitas ad quotum (§. 48.). Ergo quotus æqualis est multiplicanti (§. 126.). *Quod erat unum.*

Quoniam unitas est ad multiplicantem ut mutiplicandus ad factum (§. 45.); eadem unitas ad multiplicandum ut multiplicans ad factum (§. 122.). Sed si factum per multiplicantem dividis; multiplicans est ad factum ut unitas ad quotum (§. 48.). Ergo quotus est æqualis multiplicando (§. 126.). *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM

145. Omnia igitur facta sunt numeri compositi (§. 55.).

THEOREMA XIX.

146. *Si quotus per divisorem multiplicatur, aut contra, factum est dividendus.*

DEMONSTRATIO.

Eſt enim ut unitas ad diviſorem ita quotus ad dividendum (§. 123.). Sed ſi quotus per diviſorem multiplicatur, erit ut unitas ad diviſorem, ita quotus ad factum (§. 45.). Ergo factum æquale eſt dividendo (§. 126.). *Quod erat unum.*

Idem vero cum ſit factum, ſi diviſor per quotum multiplicetur (§. 141.); erit quoque in hoc caſu factum æquale dividendo. *Quod erat alterum.*

THEOREMA XX.

147. *Sint quatuor quæcunque quantitates proportionales A: B=C: D, ſint totidem aliæ inter ſe quoque proportionales E: F=G: H, ſi poſteriores ſingulas in ſingulas priores ducas, facta inter ſe proportionalia ſunt, nempe AE: FB=GC: DH.*

DEMONSTRATIO.

Cum ſit *per hypotheſin*

A: B=C: D & E: F=G: H
E F E F C D C D

erit EA:FB=EC:FD & CE: DF=CG: DH. (§. 134.). Sed EC=CE & FD=DF (§. 141.). Ergo EA: FB=CG: DH (§. 117.) =GC: HD (§. 141.). *Q. e. d.*

THEOREMA XXI.

148. *Rationis compositæ exponens est æqualis facto, quod producunt exponentes simplicium.*

DEMONSTRATIO.

Si rationis primæ A: B exponens$=m$; secundæ C: D exponens sit$=n$. Erit m: 1=A: B & n: 1=C: D (§. 100.). Ergo $m\,n$: 1=AC: BD (§. 147.), consequenter $m\,n$ est exponens rationis AC: BD (§. 100.), hoc est, compositæ ex A: B & C: D (§. 116.). *Q. e. d.*

SCHOLION.

149. *Sint rationes* 8: 4 *&* 24: 6. *Illius exponens est* 2; *hujus* 4. *Rationem compositam datarum habent* 192 *&* 24. *Sed* 192: 24=8, *quod est factum ex* 2 *in* 4. *Ceterum eadem demonstratio locum habet, si plures fuerint rationes.*

THEOREMA XXII.

150. *Si plures fuerint quantitates continue proportionales A, B, C, D, &c. prima A ad tertiam C est in ratione duplicata; ad quartam D in ratione triplicata &c. primæ A ad secundam B.*

DEMONSTRATIO.

1. Quoniam A: B=B: C, *per hypoth.* AB ad BC habet rationem duplicatam

 ipsius

ipſius A ad B (§. 116.). Sed AB: BC =A: C (§. 130.). Ergo etiam A ad C rationem duplicatam habet ipſius A ad B (§. 117.). *Quod erat unum.*

2. Quoniam A:B=B:C=C: D; *per hypoth.* ABC eſt ad BCD in ratione triplicata ipſius A ad B (§. 116.). Sed ABC: BCD=A:D (§. 127.). Ergo etiam A ad D eſt in ratione triplicata ipſius A ad B (§. 117.). *Quod erat ſecundum.*

3. Facile apparet, quod eodem modo demonſtrari poſſit, primum terminum habere ad quintum rationem quadruplicatam; ad ſextum quintuplicatam &c. primi ad ſecundum. *Quod erat tertium.*

CAPUT IV.

DE SPECIEBUS ARITHMETICÆ IN NUMERIS FRACTIS.

THEOREMA XXIII.

151. *Si numerator eſt æqualis denominatori, fractio* $\frac{4}{4}$ *æquivalet integro; ſi minor, fractio* $\frac{3}{4}$ *minor eſt integro; ſi major, fractio* $\frac{5}{4}$ *integro ſeu unitate major eſt.*

DE-

DEMONSTRATIO.

Denominator enim indicat unitatem ſeu integrum in partes æquales (e. gr. in noſtro caſu in 4) diviſum, & numerator numerat partes iſtiusmodi in caſu aliquo datas (§. 39.). Quodſi ergo numerator denominatori æqualis, *per hypoth.* tot dantur partes, quot habet integrum. Ergo fractio integro æqualis (§. 64.). *Quod erat primum.*

Si numerator denominatore minor; *per hypoth.* aliquot ſaltem dantur partes integri, non omnes. Ergo fractio tantum aliquot partibus integri æqualis, conſequenter eadem minor (§. 16.). *Quod erat ſecundum.*

Si denique numerator major eſt denominatore, *per hypoth.* plures dantur partes, quam habet integrum. Sed tot partes, quot habet integrum, integro æquales ſunt (§. 64.). Ergo integrum parti fractionis æquale eſt, conſequenter ipſa integro major (§. 16.). *Quod erat tertium.*

SCHOLION.

152. Fractiones *integro æquales vel eodem majores dicuntur vulgo* ſpuriæ, *quia proprie loquendo fractiones non ſunt niſi quæ integro minores.* (§. 27.).

PROBLEMA XII.

153. *Invenire, quot integra fractio, quæ integro major* ($\frac{8}{4}$), *contineat.*

RESOLUTIO.

Numerator 8 per denominatorem 4 dividatur: dico, quotum 2 indicare, quod petebatur.

DEMONSTRATIO.

Quotus enim 2 indicat, quoties denominator 4 in numeratore 8 contineatur (§. 48.). Sed denominator idem eſt cum integro (§. 39.). Ergo quotus indicat, quoties integrum in fractione contineatur. *Q. e. d.*

PROBLEMA XIII.

154. *Integros numeros reducere ad fractionem denominatoris dati.*

RESOLUTIO.

1. Multiplicetur numerus integer per denominatorem datum.
2. Factum ſcribatur loco numeratoris. Ita reperies $3=\frac{24}{8}$, $5=\frac{30}{6}$, $7=\frac{28}{4}$.

DEMONSTRATIO.

Eſt nempe factum ad denominatorem datum, ut numerus integer ad unitatem (§. 45. 119.). Sed unitas & denomi-

minator datus ſunt idem integrum (§. 39.). Ergo fractio & numerus integer æquales ſunt (§. 126. *Q. e. d.*

THEOREMA XXIV.

155. *Fractiones homogeneæ æquales ſunt, quarum numeratores ad ſuos denominatores eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

Cum fractiones inter ſe ſint homogeneæ, *ex hypoth*. ad eandem unitatem referuntur (§. 25.), adeoque ipſarum denominatores idem totum referunt (§. 39.). Quare ſi numeratores ad ſuos denominatores eandem rationem habent; fractiones æquales ſunt (§. 126.). *R. e. d.*

E. gr. $\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{5}{10}=\frac{25}{50}=\frac{1}{2}$.

SCHOLION.

156. *Intelligitur adeo identitas fractionum, ſi numerator unius toties contineatur in denominatore ſuo, quoties numerator alterius in ſuo continetur.*

COROLLARIUM.

157. Quodſi ergo tam numerator, quam denominator alicujus fractionis ($\frac{4}{6}$) per eundem numerum (2) multiplicetur vel dividatur; in caſu priore facta $\frac{8}{12}$, in poſteriore quoti ($\frac{2}{3}$) conſtituunt fractionem datæ ($\frac{4}{6}$) æquivalentem (§. 127. 130.).

PRO-

PROBLEMA XIV.

158. *Invenire communem menſuram maximam duorum numerorum.*

RESOLUTIO.

1. Dividatur numerus major per minorem.
2. Diviſor primæ diviſionis ſeu numerus datus minor denuo dividatur per reſiduum primæ diviſionis.
3. Similiter diviſor ſecundæ diviſionis dividatur per reſiduum ſecundæ & ita porro, donec nihil remaneat.

Dico, diviſorem ultimum eſſe communem menſuram maximam numerorum datorum.

E. gr. Sint numeri dati 168 & 240, reperietur eorum communis menſura maxima 24 hunc in modum:

72		24			
240 (	1	168 (	2	72 (	3
168		72		24	

Similiter communis menſura maxima numerorum 95 & 47. reperitur 1.

DEMONSTRATIO.

Diviſor ultimus 24 metitur diviſorem antecedentis (in noſtro quidem caſu ſecundæ) diviſionis 72, (*per hypoth. & §.* 53.). Ergo & metitur dividendum antece-

cedentis, hoc eſt, in noſtro caſu ſecundæ) diviſionis 168, quippe ex dividendo ultimæ diviſionis 72, aliquoties (hic quidem bis) ſumto & ejus diviſore 24 compoſitum. Metitur adeo numerum unum datorum 168 & reſiduum primæ diviſionis 72, adeoque & numerum alterum datorum 240, quippe ex minore 168 aliquoties (in noſtro caſu ſemel) ſumto & reſiduo primæ diviſionis 72 compoſitum. Eſt itaque communis numerorum datorum menſura (§. 57.).

Eſſe vero communem menſuram maximam ordine retrogrado per indirectum demonſtratur. Ponamus enim numero invento 24 majorem eſſe menſuram numerorum datorum 240 & 168 communem. Patet igitur ex antecedentibus, quod etiam metiri debeat reſiduum primæ ſeu diviſorem ſecundæ diviſionis 72, adeoque & reſiduum ſecundæ diviſionis ſeu diviſorem tertiæ, hoc eſt, in noſtro caſu inventam communem menſuram 24. Sed numerus is eadem major eſt *ex hyp.* Ergo communem menſuram inventam 24 metietur numerus major, quam 24: Quod cum ſit abſurdum (§. 53.), major communis menſura non datur. Eſt igitur ea, quam invenimus, maxima. *Q. e. d.*

PROBLEMA XV.

159. *Fractionem datam ad minores terminos reducere, h. e. invenire fractionem*

datæ

datæ ($\frac{20}{48}$) *æquivalentem, ſed minoribus numeris expreſſam.*

RESOLUTIO.

Dividatur tam numerator 20, quam denominator 48 per eundem numerum 4, qui utrumque metitur: quoti 5 & 12 componunt fractionem quæſitam $\frac{5}{12}$ (§. 157.).

COROLLARIUM I.

160. Si ergo diviſio fit per communem menſuram maximam numeratoris ac denominatoris (§. 158.) fractio ad terminos minimos reducitur.

COROLLARIUM II.

161. Si numeratorem ac denominatorem fractionis datæ ſola unitas metitur; ad minores terminos reduci nequit.

PROBLEMA XVI.

162. *Duas vel plures fractiones datas ad eandem denominationem reducere, h. e. invenire fractiones, quæ datis æquales ſunt & communi denominatore gaudent.*

RESOLUTIO.

Caſus I. Si fractiones duæ dentur, quælibet integra multiplicetur per denominatorem alterius.

E. gr.

E. gr. 5) $\frac{2}{3}$. 3) $\frac{4}{5} = \frac{10}{15}$. $\frac{12}{15}$

Casus II. Si plures dentur, tam numerator, quam denominator uniuscujusque ducatur in factum ex denominatoribus reliquarum.

E. gr. 24) $\frac{2}{3}$. 12) $\frac{1}{6}$. 18) $\frac{3}{4} = \frac{48}{72}$. $\frac{12}{72}$. $\frac{54}{72}$.

DEMONSTRATIO.

Fractiones communem habere denominatorem, patet per §. 71. & §. 141. 142. Quod vero æquivaleant primum propoſitis, manifeſtum eſt per. §. 157. Conſtat ergo propoſitum. *Q. e. d.*

PROBLEMA XVII.

163. *Fractiones addere.*

RESOLUTIO.

1. Si fractiones datæ diverſos denominatores habuerint, reducantur ad eundem (§. 162.).
2. Addantur numeratores (§. 73.) & ſummæ ſubſcribatur denominator communis.

E. gr. $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{10}{15} + \frac{12}{15}$ (§. 162.) $= \frac{22}{15} = 1\frac{7}{15}$ (§. 153.). $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{3}{4} = \frac{48}{72} + \frac{12}{72} + \frac{54}{72}$ (§. 162.) $= \frac{114}{72} = 1\frac{42}{72}$ (§. 153.) $= 1\frac{7}{12}$ (§. 159.).

DEMONSTRATIO.

Cum denominatores ſint nomina unitatum, ex quibus numeratores componun-

nuntur (§. 39.); numeratores tantum adduntur. Quoniam vero addi nequeunt, nisi fuerint homogenei (§. 40.); ad eandem denominationem sunt reducendi (§. 25.). *Q. e. d.*

PROBLEMA XVIII.

164. *Fractionem datam ex alia data subtrahere.*

RESOLUTIO.

1. Si fractiones datæ diversos habent denominatores, reducantur ad eandem denominationem (§. 262.).
2. Numerator unius ex numeratore alterius subducatur (§. 78.) & residuo denominator communis subscribatur.

E. gr. $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ (§. 159.) & $\frac{3}{5}-\frac{1}{2}=\frac{6}{10}-\frac{5}{10}$ (§. 162.) $=\frac{1}{10}$.

THEOREMA. XXV.

165. *Fractio æquatur Numeratori per denominatorem diviso, hoc est,* $\frac{3}{4}=3:4$.

DEMONSTRATIO.

Est enim fractio $\frac{3}{4}$ ad unitatem seu integrum ut numerator 3 ad denominatorem 4 (§. 27. 39.). Quare cum sit ut antecedens ad consequentem, ita exponens rationis ad unitatem (§. 100.), si antecedens sumatur numerator 3, consequens denominator 4, erit fractio $\frac{3}{4}$ exponens rationis (§. 126.). Æquatur ergo fractio

nu-

numeratori per denominatorem diviſo (§. 98.). *Q. e. d.*

PROBLEMA XIX.

166. *Fractionem per fractionem multiplicare.*

RESOLUTIO.

Ducatur numerator unius fractionis in numeratorem, & denominator unius in denominatorem alterius, facta conſtituunt fractionem quæſitam.

E. gr. $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (§. 159.).

DEMONSTRATIO.

Sit $\frac{A}{B}$ $(\frac{2}{3})$ = A : B (§. 165.) = F & $\frac{C}{D}$ $(\frac{1}{2})$ = C : D (§. *cit.*) = G; erit B : A = 1 : F & D : C = 1 : G (§. 48.). Ergo BD : AC = 1 : FG (§. 147.), hoc eſt, AC : BD $\frac{2}{3} : \frac{1}{2}$) = FG : 1 (§. 119.) = FG $(\frac{2}{6})$. *Q. e. d.*

SCHOLION.

167. *Vix autem opus eſt ut annotemus; ſi fractio per numerum integrum multiplicanda, ducendum eſſe ſolum numeratorem in integrum numerum datum* E. gr. *Factum ex* $\frac{3}{7}$ *in* 2 *eſt* $\frac{6}{7}$.

PROBLEMA XX.

168. *Fractionem* $\frac{4}{5}$ *per aliam fractionem* $\frac{2}{3}$ *dividere.*

RESOLUTIO.

1. Divisor invertatur. E. gr. loco $\frac{2}{3}$ scribe $\frac{3}{2}$. 2. Divisor inversus ducatur in dividendum (§. 166.): quod prodit $\frac{12}{10}$ seu $1\frac{1}{5}$ (§. 153.) est quotus quæsitus.

DEMONSTRATIO.

Quoniam divisor ad dividendum ut unitas ad quotum (§. 48.); erit etiam dividendus ad divisorem ut quotus ad unitatem (§. 119.). Quodsi fractiones ad eandem denominationem reducantur (§. 162.), cum eædem sint æquales quotis ex divisione numeratorum per denominatorem communem (§. 165.); erit Numerator fractionis dividendæ ad Numeratorem dividentis ut fractio dividenda ad fractionem dividentem (§. 130.), consequenter in hoc casu numerator dividendæ ad Numeratorem dividentis ut quotus ad unitatem (§. 117.). Quare fractiones datæ ad communem denominatorem reducendæ sunt & numerator dividendæ per numeratorem dividentis dividi debet, ut habeatur quotus ex divisione fractionis dividendæ per fractionem dividentem emergens (§. 126.). Enimvero dum fractiones duæ ad eandem denominationem reducuntur, numerator primæ enascitur ex numeratore ipsius dato in denominatorem secundæ, numerator vero secundæ ex ipsius numeratore dato in deno-

nominatorem primæ ducto (§. 162.). Obtinemus adeo numeros, ex quorum divisione quotus quæsitus emergit, si divisor inversus juxta (§. 166.) in fractionem dividendam ducatur. *Q. e. d.*

Scholion.

169. *Neque vero mirum est, quod quoti numeri integri esse possint. Una enim fractio alteram ter, quater millies &c. continere potest.*

Problema XXI.

170. *Integrum 3 per fractionem $\frac{4}{7}$ dividere.*

Resolutio.

1. Divisor invertatur, ut in problemate præcedente (§. 168.). E. gr. loco $\frac{4}{7}$ scribe $\frac{7}{4}$.
2. Numerus integer 3 datus ducatur in Numeratorem 7 divisoris inversi.
3. Facto subscribatur ejusdem denominator 4: quod prodit $\frac{21}{4}$ sive $5\frac{1}{4}$ est quotus quæsitus.

Demonstratio.

Eadem est cum demonstratione problematis præcedentis (§. 168.).

CAPUT V.

DE POTENTIIS NUMERORUM, GENESI PRÆSERTIM AC ANALYSI NUMERORUM QUADRATORUM ET CUBICORUM.

Definitio XLVI.

171. Si numerus quicunque 2 in ſe ipſum ducatur, factum 4 *Numerus quadratus*; ipſe autem hujus intuitu *Radix quadrata*; appellatur.

Corollarium.

172. Cum ſit ut unitas ad radicem quadratam, ita radix ad ipſum quadratum (§. 45. 171.); erit radix media proportionalis inter unitatem & quadratum (§. 114.).

Definitio XLVII.

173. Si numerus quadratus 4 porro per radicem 2 multiplicetur; factum 8 dicitur *Numerus Cubicus* ſeu *Cubus*, & radix 2 ejus intuitu *Radix cubica*.

Corollarium.

174. Cum ſit ut unitas ad radicem, ita radix ad quadratum (§. 45. 171.) & ut unitas ad radicem, ita quadratum ad cubum (§. 45. 173.);

173.); erit etiam radix ad quadratum ut quadratum ad cubum (§. 117.), hoc eſt, unitas, radix, quadratum & cubus in continua proportione progrediuntur (§. 114.) & radix cubica eſt primus ex duobus numeris mediis continue proportionalibus inter unitatem & cubum.

Definitio XLVIII.

175. Cum iſtiusmodi multiplicatio in infinitum continuari poſſit; facta inde genita generali *poteſtatum*, *potentiarum*, *dignitatum* nomine appellari ſolent.

Definitio XLIX.

176. *Exponens dignitatis* eſt numerus, qui indicat, quoties dignitas data per radicem dividenda, antequam ad unitatem perveniatur. Ita exponens quadrati eſt 2, cubi 3 (§. 171. 173.).

Definitio L.

177. Hodie tantum non omnes dignitates optime diſtinguunt per exponentes, ita ut radix dicatur *dignitas prima*, quadratum *ſecunda*, cubus *tertia* &c.

Hypothesis XII.

178. *Si* a *fuerit radix*, *erunt potentiæ ipſam ſequentes* a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, &c. *vel*, *ſi* a=2, 2^2, 2^3, 2^4, 3^5, 2^6, &c. *ita ut ſit* $2^2=4$, $2^3=8$, $2^4=16$ &c. nempe ſuperius a dextris jungitur exponens.

DEFINITIO LI.

179. *Quantitatem ad dignitatem desideratam evehere* idem est ac invenire factum ex ipsa aliquoties in se ducta emergens. E. gr. 2 evehere ad dignitatem tertiam idem est ac invenire factum 8, cujus factores 2. 2. 2.

DEFINITIO LII.

180. *Ex dignitate data radicem extrahere, vel latus educere* idem est ac invenire numerum 2, qui aliquoties in se ipsum ductus datam potentiam (e. gr. tertiam) 8 producit.

SCHOLION.

181. *Cum dignitates superiores nonnisi in Analysi usum habeant; in præsenti genesin & analysin quadratorum & cuborum tantum tradimus. Radices vero quadratas ac cubicas extracturus omnium digitorum numeros quadratos & cubicos nosse debet, quos sequens tabula exhibet:*

Radices	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrati	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Cubici	1	8	27	64	125	216	343	512	729

DEFINITIO LIII.

182. *Radix* tam quadrata, quam cubica, aut dignitatis superioris cujuscunque dicitur *binomia*, si ex duabus; *trino-*

nomia, si ex tribus; *multinomia*, sive *polynomia*, si ex pluribus, quam duabus partibus constat.

THEOREMA XXVI.

183. *Numerus quadratus radicis binomiæ componitur ex quadrato partis primæ, ex facto dupli primæ in alteram & ex quadrato partis alterius.*

DEMONSTRATIO.

Prodit enim numerus quadratus, si radix in seipsam ducitur (§. 171.) Utraque vero pars radicis sigillatim ducitur in utramque simul (§. 85.) Quare productum componi debet 1. ex facto partis primæ in seipsam, hoc est, ex quadrato partis primæ (§. 171.), 2. ex facto partis primæ in secundam & ex facto secundæ in primam, hoc est, ex duplo facto primæ in secundam, seu, ex facto dupli primæ in secundam (§. 141. 142.), 3. ex facto partis secundæ in seipsam, hoc est, ex quadrato partis secundæ (§. 171.). *Q. e. d.*

SCHOLION I.

184. *Demonstratio ocularis, si in quocunque exemplo singulari multiplicatio non actu peragitur, sed saltem indicatur: quo in casu exempli universalis vices tuetur, id nimirum non infelicius quam figuræ in Geometria repræsentans, quod singularia in uni-*

verſum omnia commune habent. E. gr. Sit radix binomia 34 *aut*

30 + 4; *erit*

30 + 4	*Radix binomia*
30 + 4	
16	*Quadratum partis II.*
120	*Facta ex I in II.*
120	
900	*Quadratum partis I.*
1156	*Quadratum totius.*

Egregium hoc artificium vires imaginationis mire extendit & intellectum juvat tam in demonſtrationibus concipiendis, quam in propoſitionibus inveniendis

COROLLARIUM I.

185. Cum pars dextra ſive ſecunda inter unitates, ſiniſtra ſive prima inter decades locum obtineat (§. 35.); quadratum illius in loco dextimo, factum ex unius duplo in alterum in ſecundo, quadratum denique primæ in tertio a dextimo terminari debet (§. 34.).

SCHOLION II.

186. *Scilicet quadratum partis dextimæ nullam adjunctam habet cyphram; duplo facto ex parte una in alteram cyphra una, quadrato autem partis ſiniſtra duæ adjunguntur, ut numeri ſolitarie poſiti juſtum locum nanciſcantur* (§. 34.).

CORO-

COROLLARIUM II.

187. Si radix multinomia fuerit; partes duæ aut plures ſiniſtimæ habeantur pro una, & extemplo patebit, quadratum numeri cujuscunque componi ex quadratis ſingularum partium & factis ex duplo partis cujuslibet in omnes ipſa ſiniſteriores: ut adeo theorema unum compoſitioni omnium numerorum quadratorum ſufficiat.

SCHOLION III.

188. *Sit radix* 346: *ſumatur* 340 *pro parte una &* 6 *pro altera; erit* (§. 183.)

```
 340 + 6
 340 + 6
─────────────
        36  Quadratum partis III.
      2040 ⎫ Facta ex parte III. in I & II
      2040 ⎭             ſimul
      1600  Quadratum partis II.
     12000 ⎫ Facta ex parte I in II.
     12000 ⎭
     90000  Quadratum partis I.
─────────────
    119716  Quadratum totius.
```

COROLLARIUM III.

189. Quonam in loco ſingula producta terminentur, ex corollario primo & ejus ſcholio intelligitur (185. 186.). Habenda nimirum eſt ratio cyphrarum numeris in ſe invicem ductis adjungendarum, ſi ſolitarii ponantur, ut juſtum nanciſcantur locum (§. 34.).

PROBLEMA XXII.

190. *Ex numero quocunque dato radicem quadratam extrahere.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

1. Numerus propoſitus diſtinguatur in claſſes, binas notas claſſi unicuique aſſignando, initio a dextra facto. Tot enim erunt partes radicis, quot claſſes habentur (§. 187. 189.). Notandum vero, quod claſſi ſiniſtimæ interdum nonniſi nota unica relinquatur.
2. Jam cum in claſſe ſiniſtima reperiatur quadratum notæ ſiniſtimæ radicis (§. *cit.*); in Tabula radicum (§. 181.) quæratur numerus quadratus ei, qui claſſem ſiniſtimam occupat, vel æqualis, vel eodem proxime minor, & ex ipſo ſubtrahatur; radix vero ejus poſt lunulam ſcribatur.
3. Quoti inventi duplum ponatur ſub nota ſiniſtima claſſis ſubſequentis & inde porro ſiniſtrorſum, ſi ex notis pluribus conſtiterit. Inveſtigetur novus quotus *per abacum Pythagoricum* (§. 83.), inventusque poſt lunulam ſcribatur: eſt enim pars ſecunda radicis (§. 183. 144.).
4. Idem quotus ponatur ſub nota dextima illius claſſis & factum ex numero

ſub-

ſubſcripto integro in diviſorem (§. 185.) ſubducatur, ut in diviſione moris eſt.

5. Quodſi operatio juxta regulam tertiam & quartam in reliquis claſſibus iteretur; prodibit radix quæſita (§. 187. 189.).

```
Er.  11|56(34        11|97|16(346
      9|::             9|::|::
     --|--            --|--|--
      2|56             2|97|::
        64               64|::
      2 56             2 56|::
     -----            -----|--
        0                41|16
                          6|86
                         41|16
                         -----
                            0
```

RROBLEMA XXIII.

191. *Radicem quadratam ex fractione data extrahere, cujus numerator & denominator eſt numerus quadratus.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

Quoniam numerum fractum per fractum multiplicans unius numeratorem in numeratorem alterius & denominatorem pariter in denominatorem alterius ducit (§. 166.), quadratum autem ex ductu ejusdem numeri in ſeipſum enaſcitur (§. 171.); ra-

radicem quadratam extracturus eam sigillatim ex numeratore ac denominatore extrahere tenetur.

Ita radix quadrata ex $\frac{4}{9}$ est $\frac{2}{3}$, ex $\frac{49}{144}$ vero $\frac{7}{12}$.

COROLLARIUM I.

192. Cum numeri integri ad fractionem denominatoris dati reducantur, si per hunc multiplicentur & facto tanquam numeratori denominator datus subscribatur (§. 154.); si numerus datus, qui quadratus non est, ad fractionem reducatur, cujus denominator est quadratus & ex fractione extrahatur radix (§. 191.): quæ prodit, fractio radicem prope veram exhibet in istiusmodi partibus, quas denominatoris quadrati radix indicat.

SCHOLION I.

193. *E. gr. Si ex* 2 *extrahenda radix prope vera, quæ non deficiat in partibus sextis; duc* 2 *in* 36, *ut prodeat fractio* $\frac{72}{36}$, *cujus radix* $\frac{8}{6}$ *sive* $1\frac{2}{6}$ *exhibet radicem a vera magnitudine parte sexta non differentem, seu cujus defectus minor est quam* $\frac{1}{6}$.

COROLLARIUM II.

194. Quoniam numerum per articulum primarium, veluti 10, 100, 1000 &c. multiplicaturus eidem non nisi cyphras 0, 00, 000 &c. unitati adhærentes adjungere teneris (§. 86.); radicem prope veram in fractionibus decimalibus desiderans numero

qui

qui quadratus non eſt, 2, 4, 6 &c. cyphras junge dextrorſum & operationem continua: ita enim prodibit radix prope vera in partibus decimis, centeſimis, milleſimis &c.

SCHOLION II.

195. E. gr. *Sit extrahenda radix quadrata ex 345; prodibit* $18\frac{57}{100}$.

```
3 | 45 ( 18 57/100
1 | : :
----------------
  2 | 45
   (28)
   224 |
  -----
  2,1. | 00
   (3 65)
   18 25
  ---------
     2 7.5. | 0.0
      (37   | 07)
    ------------
      259  49
    ------------
       15  51
```

THEOREMA XXVII.

196. *Numerus cubicus radicis binomiæ componitur ex numeris cubicis duarum partium, ex facto tripli quadrati partis primæ in ſecundam & ex facto tripli quadrati partis ſecundæ in primam.*

DE-

DEMONSTRATIO.

Numerus cubicus prodit, si quadratum per radicem multiplicetur (§. 173.). Sed quadratum radicis binomiæ componitur ex quadratis partium & facto duplo ex parte una in alteram (§. 183.). Quare cubus componitur ex cubo partis primæ, ex triplo facto quadrati partis primæ in secundam, ex triplo facto quadrati partis secundæ in primam, hoc est, ex facto tripli quadrati partis primæ in secundam, & facto tripli quadrati partis secundæ in primam (§. 141.) atque ex cubo partis secundæ (§. 171. 173.). *Q. e. d.*

SCHOLION I.

197. *Demonstrationem ocularem denuo sistit exemplum singulare, in quo multiplicatio tantum indicatur. Sit e. gr. radix* 34 *seu* 30+4, *erit*

30+4 *Radix*

16 *Quadrat. part* II.
120 }
120 } *Facta ex* I *in* II.
900 *Quadrat. part.* I.

64 *Cubus part.* II.
480 }
480 } *Facta ex quadrat.* II *in* I.
3600 *Factum ex quadrat.* I *in* II.
480 *Factum ex quadrat.* II *in* I.

3600

$$\left.\begin{array}{r}3600\\3600\end{array}\right\}$$ *Facta ex quadrat.* I *in* II.

27000 *Cubus part. I.*

39304. *Cubus totius.*

COROLLARIUM I.

198. Cum pars dextra inter unitates, ſiniſtra inter decades locum obtineat (§. 35.); numerus cubicus dextræ in loco dextimo, factum ex triplo quadrato eſus in ſiniſtram in ſecundo, factum ex triplo quadrato ſiniſtræ in dexteram in tertio, cubus denique partis ſiniſtræ in quarto loco terminatur (§. 34.)

COROLLARIUM II.

199. Si radix multinomia fuerit, duæ vel plures notæ ſiniſtimæ pro una habentur, ut binomiæ formam mentiatur; extemplo patet, quod cubus quicunque componatur ex cubis ſingularum partium radicis, & ex factis tripli quadrati quarumlibet ſiniſteriorum in proxime dexteriorem, itemque ex factis tripli quadrati cujuslibet dexterioris in omnes ſiniſteriores.

SCHOLION II.

200. *Sit radix* 346. *Sume* 340 *pro parte una radicis, erit* 6 *pars altera, conſequenter* (§. 196.).

```
     346
     346
 ─────────
   90000  Quadrat. part. I.
   12000}
   12000} Facta ex I in II.
    1600  Quadrat. part. II.
 ─────────
  115600  Quadrat. I & II simul
    2040}
    2040} Facta ex III in I & II simul.
      36  Quadrat. part. III.
 ─────────
27000000  Cubus part I.
 3600000}
 3600000} Facta ex quadr. I in II.
  480000  Fact. ex quadr. II in I.
 3600000  Fact. ex quadr. I in II.
  480000}
  480000} Fact. ex quadr. II in I.
   64000  Cubus part. II.
  693600} Facta ex quadr. I & II simul
  693600}            in III.
   12240  F. ex quad. III in I & II sim.
  693600  F. ex quad. I & II sim. in III.
   12240}
   12240} Fact. ex quadr. III in I & II simul.
     216  Cubus part. III.
 ─────────
41421736  Cubus totius
```

Notandum scilicet, sectionem numeri in duas partes arbitrariam esse, cumque theorema generaliter de radice utcunque in duas partes divisa loquatur, idem quoque ad quamlibet sectionem applicari posse. E. gr. *Numerus* 346 *non modo stante theoremate in* 340 &

& 6, vel in 300 *&* 46, *verum etiam in* 195 & 151, *in* 89 *&* 257, *& in duas quascunque alias partes dividi potest: id quod etiam tentanti palam fit. Ceterum idem valere in numeris quadratis, immo in genere in potentiis quibuscunque, me tacente intelligitur.*

COROLLARIUM III.

201. In quibus autem locis singula terminentur facta, ex corollario primo (§. 198.) colligitur: habenda nimirum & hic est ratio cyphrarum numeris in se invicem ductis adjungendarum, si solitarii ponantur. *Vid. exemplum schol. præc.* (§. 200.).

PROBLEMA XIV.

202. *Ex numero dato radicem cubicam extrahere.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

1. Numerus datus distinguatur in classes, tres notas unicuique assignando, initio a dextris facto. Etenim ex tot notis radix componitur, quot classes emergunt (§. 198. 201.). Notandum vero, non repugnare, ut classi sinistimæ una, vel duæ notæ cedant.
2. In Tabula radicum (§. 181.) quæratur numerus cubicus eo proxime minor numero, qui in classe sinistima continetur, nisi ipse in eadem inveniatur, atque ab hoc subtrahatur;

ejus vero radix poſt lunulam ſcribatur: eſt enim pars prima radicis (§. 198.).

3. Quoti inventi quadratum triplum (§. 198. 201.) ſcribatur ſub nota ſiniſtima claſſis ſubſequentis & inde porro ſiniſtrorſum, ſi ex pluribus notis conſtiterit: quo facto quæratur quotus, qui erit pars ſecunda radicis (§. *cit.* & §. 144.).

4. Diviſor ducatur in novum quotum & productum ſub eo deleto ſcribatur, ſub nota vero media claſſis ejusdem terminetur factum ex triplo quadrato novi quoti in præcedentem; ſub dextima denique cubus novi quoti. Hæc tria facta in unam ſummam collecta ex notis numeri cubici ſupraſcriptis ſubtrahantur (§. *cit.*).

5. Quodſi operatio per reliquas claſſes juxta regulam tertiam & quartam continuetur; prodibit radix quæſita (§. 199.).

E. gr.

E. gr.	47	437	928 (362
	27		
	—	—	
	20	437	
Divisor	(2	7) ::	
Fact. ex D. in Q.	16	2 ::	
Fac. ex 3 □ N. Q. in pr.	32	4 :	
Cubus N. Q.	2	16	
Summa factor.	106	56	
		781	928
Divisor		(388	8) ::
Fact. ex Div. in Q. N.		777	6 ::
Fac. ex 3 □ N. Q. in pr.		::4	32 :
Cubus N. Q.		:::	::8
Summa factorum		781	928
		000	000

PROBLEMA XXV.

203. *Radicem cubicam ex fractione extrahere; cujus numerator & denominator cubus est.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

Eodem, quo supra (§. 191.), modo patet, radicem sigillatim ex numeratore ac denominatore extrahendam esse.

Ita radix ex $\frac{27}{343}$ est $\frac{3}{7}$, ex $\frac{64}{729}$ vero $\frac{4}{9}$.

COROLLARIUM I.

204. Hinc porro eodem, quo supra (§. 192.), modo consequitur, radicem prope veram in fractione dati denominatoris inveniri, si numerus, qui cubus non est, per hujus denominatoris cubum multiplicetur & radici cubicæ ex facto extractæ tanquam numeratori denominator datus subjiciatur.

 SCHO-

SCHOLION I.

205. E. gr. *Si ex 12 extrahenda radix cubica prope vera, defectu minore quam $\frac{1}{8}$; ducatur 12 in 512 cubum ipsius 8 & ex facto 6144 extrahatur radix cubica 18, erit $\frac{18}{8}$ s. $2\frac{2}{8}$ radix prope vera, cujus defectus est minor quam $\frac{1}{8}$.*

COROLLARIUM II.

206. Immo inde ulterius eodem, quo supra (§. 194.), modo fluit, radicem prope veram in fractionibus decimalibus inveniri, si 3, 6, 9 &c. cyphræ numero non cubo dextrorsum pro decimis, centesimis, millesimis &c. partibus jungantur & operatio (§. 202.) continuetur.

SCHOLION II.

207. E. gr. *Sit extrahenda radix cubica ex 3; eam reperies $1\frac{44}{100}$.*

```
3( 1,44/100
1
―――――――――
   2. | 0.0.0
      | 3 . .
   1 2 . .
     4 8 .
       6 4
―――――――――――
   1 7 4 4
     2 5 6. | 0.0.0
       8 8  | 8 . .
     2 3 5 2 . .
         6 7 2 .
             6 4
――――――――――――――
     2 4 1  9 8 4
――――――――――――――
       1 4  0 1 6
```

PRO-

PROBLEMA XXVI.

208. *Examinare extractionem radicis quadratæ ac cubicæ.*

RESOLUTIO.

I. Radix quadrata inventa ducatur in se ipsam & facto residuum, si quod fuerit addatur. Quodsi numerus prodeat, ex quo radix extracta; erit numerus inventus radix quadrata dati vel exacta, vel (si talem non habeat) prope vera (§. 171.)

```
    18.57
    18.57
   ------
   12999
   9285
  14856
  1857
 ---------
  3448449
     1551
 ---------
  3450000
```

E. gr. Radicem quadratam prope veram ex 345 supra (§. 195.) reperimus $18\frac{57}{100}$. Duc radicem 18. 57 in seipsam & facto 3448449 adde residuum 1551: prodibit numerus 345; ex quo extractio fieri debebat, quatuor cyphris auctus: ut in extractione ad inveniendas centesimas factum fuerat.

II. Radix cubica inventa ducatur in se ipsam, & factum denuo in eandem. Producto posteriori addatur, si quod fuerit, residuum. Quodsi numerus prodeat, ex quo extractio facta, operatio rite peracta (§. 173.).

```
   1.44
   1.44
 ------
   5 76
  576
 144
 ------
  20736
   1 44
 ------
  82944
 82944
20736
 ------
2985984
  14016
 ------
3000000
```

E. gr. Superius (§. 207.) ex 3 extracta radix est $1\frac{44}{100}$. Duc hanc radicem 1. 44 in seipsam & factum 20736 denuo in 1. 44. Producto alteri 2985984 adde, quod supra residuum erat, 14016. Aggregatum est numerus 3 sex cyphris auctus, ut in operatione factum fuerat.

HYPOTHESIS XIII.

209. *Interdum utile est, extractionem radicis tantum indicari, præsertim si perfecta haberi nequit. Est autem signum radicale sequens* $\sqrt{}$: *cui in vertice jungitur exponens, dignitatis, si altioris gradus, quam quadrata.* E. gr. $\sqrt{2}$ denotat radicem ex 2; $\sqrt[3]{5}$ denotat radicem cubicam ex 5.

CAPUT VI.
DE
REGULIS PROPORTIONUM.

THEOREMA XXVIII.

210. *Si fuerint quatuor quantitates proportionales; factum extremarum æquatur facto mediarum.*

DEMONSTRATIO.

$$\begin{array}{c} 6:3=8:4 \\ \underline{4 \quad\quad 3} \\ 24=24 \end{array}$$

A: B=C: D (*per hypoth.* & §. 110.). Ergo AD: BC=CD : DC (§. 134.). Sed CD=DC (§. 141.). Igitur AD=BC (§. 108.). *Q. e. d.*

THEOREMA XXIX.

211. *Si fuerint tres quantitates continue proportionales; factum extremarum est æquale mediæ quadrato.*

DEMONSTRATIO.

$$\begin{array}{c} 6:12=12:24 \\ \underline{12 \quad\quad 6} \\ 144=144 \end{array}$$

Quoniam enim A: B=B: C (*per hypoth.* & §. 114. 110.); erit AC=BB (§. 210.). Sed BB est quadratum ipsius B (§. 171.). Ergo factum extremarum AC æquatur quadrato mediæ. *Q. e. d.*

THEOREMA XXX.

212. *Si quantitas AD producta ex duabus aliis se mutuo multiplicantibus A & D fuerit æqualis alteri BC ex duabus aliis B & C eodem modo productæ; erit A: B=C: D.*

DEMONSTRATIO.

6	8
4	3
24 =	24
4:8=	3:6

AC: AD=C:D (§. 127. Sed AD=BC, *per hypoth.* Ergo AC: BC=C: D (§. 118.), consequenter A: B=C:D (§. 130.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

213. Si ergo in serie quatuor quantitatum factum ex secunda in tertiam æquale facto ex prima in quartam; erunt quantitates istæ proportionales.

PROBLEMA XXVII.

214. *Inter duos numeros (8 & 72) medium proportionalem invenire.*

RESOLUTIO.

1. Datorum unus 72. multiplicetur per alterum 8 (§. 85.).
2. Ex facto 576 extrahatur radix quadrata 24 (§. 190.): quæ erit numerus quæsitus (§. 211.).

PRO-

PROBLEMA XXVIII.

215. *Datis tribus numeris 3, 12, 5 quartum; aut duobus, tertium proportionalem invenire.*

RESOLUTIO.

1. Secundus 12 ducatur in tertium 5, aut in altero caſu ſecundus in ſeipſum.
2. Factum 60 dividatur per primum 3. Quotus 20 eſt quartus, in altero caſu tertius quæſitus.

DEMONSTRATIO.

Si enim terminum ſecundum per tertium, aut in altero caſu ſecundum per ſeipſum multiplicas; factum ex primo in quartum, in caſu altero ex primo in tertium prodit (§. 210. 211.). Quodſi ergo hoc per primum dividis; quotus eſt terminus quartus, in caſu altero tertius (§. 144.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

216. Data quælibet fractio converti poteſt in aliam æqualem datæ denominationis. Quodſi enim *per probl. præſ.* ad denominatorem & numeratorem fractionis datæ atque denominatorem deſideratæ quæratur numerus quartus proportionalis; erit is numerator fractionis quæ-

sitæ (§. 155). E. gr. sit fractio $\frac{2}{3}$ convertenda in aliam, cujus denominator 24, reperietur ea $\frac{16}{24}$.

$$\begin{array}{l} 3 - 2 - 24 \\ \quad\ \ 2 \\ \hline \quad 48 \end{array}$$

$$48(16$$

COROLLARIUM II.

217. Quodsi numerus partium, in quas integrum aliquod communi more dividitur, pro denominatore assumitur; valor fractionis datæ in mensura vulgari reperitur. E. gr. Cum apud nos thalerus in 24 grossos dividatur, ex ante allato exemplo apparet, 16 grossos æquivalere duabus tertiis unius thaleri.

COROLLARIUM III.

218. Si vero denominator assumitur 10, 100, 1000 &c. fractiones datæ in decimales convertuntur. Ita reperiemus $\frac{2}{3} = \frac{666666}{1000000}$ &c. in infinitum; $\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$; $\frac{3}{7} = \frac{42857}{100000}$ fere.

SCHOLION I.

219. *In fractionibus decimalibus denominator omitti solet, quia ex meris cyphris & præfixa unitate constat. Ejus vero loco punctum (.) numeratori præfigitur & loca vacua replentur cyphra, ita ut e. gr. duæ cyphræ præponantur, si fractio a millesimis incipiat. Ita loco* $\frac{23}{100}$ *scribimus* 0.23; *loco* $5\frac{47}{10000}$ *scribimus* 5.0047. *Est vero harum fractionum non exiguus in Mathesi usus, quas primus in condendis Tabulis sinuum adhibuit* Johannes Regiomontanus.

SCHO-

SCHOLION II.

220. *Resolutio hujus problematis vulgo* Regula trium *appellatur, quia ex tribus numeris invenitur quartus. Usus ejus amplissimus tam in vita communi, quam in scientiis. Hinc* Regula aurea *vocatur. Facile autem apparet, hac regula nullibi esse utendum, nisi ubi de numerorum datorum proportione constiterit.*

SCHOLION III.

221. *Quæ in commercium veniunt, pretiis suis proportionalia sunt. Qui enim duplum mercis accipit, duplum; qui triplum accipit, triplum pretium solvit. Dato igitur pretio quantitatis cujusdam determinatæ mercis, per regulam trium invenitur pretium quantitatis cujuscunque alterius datæ, aut quantitas mercis dato cuicunque alteri pretio respondens. E. gr. Pretium* 3 *librarum sunt* 4 *thaleri, quantum est pretium* 17 *librarum? Cum sit ut* 3 *libræ ad* 17 *libras, ita illarum pretium (quod est* 4 *thalerorum) ad pretium harum; hoc quidem ita invenitur:*

3L. — 17 L. — 4 Th.
4
——
68

2
68 ($22\frac{2}{3}$ th.
33

Item: 3 *libræ veneunt* 4 *thaleris, quot* $22\frac{2}{3}$ *thaleris? Cum sint ut* 4 *thaleri ad* $22\frac{2}{3}$, *ita* 3 *libræ ad quæsitas; harum numerus ita innotescit:*

4Th.

4 Th. — 22⅔ Th. — 3 L.
3 2
68 | 68 | 44 (17 L.

Hinc ſimul patet, quomodo regula trium examinetur, hoc eſt, inveniatur, utrum operatio per eam rite peracta, nec ne.

SCHOLION IV.

222. *Similiter merces operariorum eſt tempori proportionalis, quo labore defunguntur, etiam quantitas laboris eidem tempori proportionalis, ſi æqualibus articulis æqualia penſa abſolvuntur; eadem numero operariorum proportionalis, ſi penſa æqualia ſinguli abſolvunt. E. gr. Intra 2 horas 6 libri folia perleguntur: Quanto horarum ſpatio 360 perlegi poterunt?*

6 F. — 360 F. — 2 H.
2 1
720 | 720 | 666 (120 H.

SCHOLION V.

223. *Si numeri dati fuerint heterogenei, non eandem proportionem habent, quam res ipſis reſpondentes: ad homogeneos igitur reducendi. Ita thaleri in groſſos, groſſi in nummos, libræ in ſemiuncias, horæ in minuta &c. convertuntur. E. gr. 3 libræ & 4 ſemiunciæ veneunt 2 thaleris & 4 groſſis, quanti libræ 2? Calculus talis eſt:*

3. L. 4 S. — 2 L. — 2 Th. 4. gr.
32 — 32 — 24

100 S. — 64 — 52 gr.
52

128
320

3328

$\frac{3328}{100}$ ($33\frac{28}{100}$ seu $\frac{7}{25}$ gr.

Quodsi nosse cupias, quot nummis conveniunt $\frac{7}{25}$ *grossi, ita reperies* (§. 217.).

25 — 7 — 12
7

84

$\frac{29}{84}$ ($3\frac{9}{25}$ num.
25

Si nummus ulterius divideretur, poterat quoque valor $\frac{9}{25}$ *unius nummi eodem modo reperiri: sed cum tanti non sit, ut inveniatur, fractio illa tuto negligitur.*

Scholion VI.

224. *In scriptis Arithmeticorum* Regula trium inversa *occurit, qua terminus datorum primus duci jubetur in secundum & factum dividi per tertium, contraria nimirum ratione, qua in* Regula trium directa *usi sumus* (§. 215. 220.), *quia scilicet termini contra naturam proportionis ordinantur. Sed ea opus non est, si numeri dati, prout proportio exigit, ordinentur. E. gr.* 125 *milites operi exstruendo* 6 *menses impendunt: quantus requiritur militum numerus: ut intra* 2 *absolvatur? Evidens est, quod*

sit,

ſit, ut ſpatium 2 menſium ad ſpatium 6 menſium, ita numerus militum, qui opus intra ſex menſes abſolvunt, ad numerum militum, qui intra duos idem exſtruunt. Quo minore enim temporis intervallo exſtruitur, eo major militum numerus requiritur. En calculi typum:

2 M. — 6 M. — 125 Mil.
6
———
750

22
150(375 Mil.
222

SCHOLION VII.

225. *Interdum gemina regulæ trium applicatione opus eſt, antequam numerus quæſitus innoteſcat. Ea vulgo pro peculiari regula venditatur & ab aliis* Regula de quinque, *ab aliis* Regula Compoſita *appellatur, E. gr.* 300 *thaleri dant intra* 2 *annos uſuram* 36 *thalerorum, quantam dabunt* 20000 *thaleri intra* 12 *annos? Hic per regulam trium primum invenitur, quanta ſit uſura a* 20000 *expectanda intra* 2 *annos. Dein per eandem inveſtigatur, quanta eadem intra* 12 *annos exiſtat:*

300 Th. — 20000 Th. — 36 Uſ.
36

x

720000 | 720000 (2400 Uſ.
333300

2 A. — 12 A. — 2400 Uſ.
12

28800 (14400 Uſ. 4800
222 | 24

28800

Scholion VIII.

226. *Exemplis iſtiusmodi regula trium ſemel applicata ſatisfacere poteſt. Cum enim in noſtro caſu bis* 300 *thaleri eandem dent uſuram intra* 1 *annum, quam* 300 *intra* 2, *&* *duodecies* 20000 *tantam intra* 1 *annum, quantam* 20000 *intra* 12; *omiſſis temporis circumſtantiis ita inferatur: bis* 300, *id eſt* 600 *thaleri dant uſuram (intra annum ſcilicet)* 36, *quantam dabunt duodecies* 20000, *id eſt* 240000 *thaleri (itidem intra annum?*

600 Th. — 240000 Th. — 36 uſ.
36

1440000 22
72 | 8640000 (14400

8640000 | 6666600

Poſterior hæc methodus priori præfertur, quod in illa ad fractionum tædia ſæpe prolabimur.

Scho-

SCHOLION IX.

227. *Dantur & alii casus, in quibus iteratæ regulæ trium applicationi supersedere non licet. Ita, si commune sociorum lucrum vel damnum inter eos distribuendum; toties applicatur, quot sunt socii. Est enim ut summa collatorum ad lucrum vel damnum commune, ita collatum quodlibet partiale ad lucrum vel damnum partiale ipsi respondens. E. gr. Lucrum commune trium personarum est* 2000 *thalerorum, collatum primi* 1000, *secundi* 500, *tertii* 300: *inveniri debent lucra partialia singulis convenientia. En typum calculi:*

Collatum	primi	1000 Th.
	secundi	500
	tertii	300
Summa Collatorum		1800 Th.

1800 Th. — 1000 Th. — 2000 Th.

2 000

2000000

```
  111
 12222
2000000 ( 1111 2/18 Lucrum primi.
1888800
  111
```

1800. Th. — 500 Th. — 2000 Th.

2 000

1000000

```
111
555
1000000 ( 555 10/18  Lucrum secundi.
 188800
  11
```

1800 Th. — 300 Th. — 2000 Th.

```
           2 000
        ---------
          600000
```

```
  33
 3666
600000 ( 333 6/18  Lucrum tertii.
188800
  11
```

EXAMEN.

1111 $\frac{8}{18}$	Lucrum primi
555 $\frac{10}{18}$	secundi
333 $\frac{6}{18}$	tertii
2000 Th.	Lucrum commune.

SCHOLION X.

228. *Non desunt alia exempla, quæ calculum eundem requirunt, ut cum in Medicina aut artibus aliis ex data ratione, quam pondera miscibilium inter se habent, inveniuntur pondera miscibilium requisita, ut mixtum integrum sit sponderis dati. E. gr. Tria simplicia compositionem alicujus medicamenti ingrediuntur, dosis unius est* 4, *alterius* 5, *tertii* 2 *unciarum: inveniri debent doses singulorum requisitæ, ut pondus compositi sit* 8 *librarum. En calculi typum:*

Pondus	primi	simplicis	4 Unc.
	secundi		5
	tertii		2
		Summa	11 Unc.

11 Unc.—8 L.—4 Unc.

16
———
128
4
———
512

1
176
512 ($46\frac{6}{11}$ pond.
111 (simp. primi
1

11 Unc.—128 Unc.—5 Unc.

5 | 1
——— | 102
640 | 640 ($58\frac{2}{11}$ Pond. simp.
| 111 (secund.
| 1

11 Unc.—128 Unc.—2 Unc.

2 | 33
——— | 256 ($23\frac{3}{11}$ Pond. simp.
256 | 111 (tertii.
| 1

EXAMEN.

Pondus simplicis	primi	$46\frac{6}{11}$ Unc.
	secundi	$58\frac{2}{11}$
	tertii	$23\frac{3}{11}$
Pondus mixti		128 Unc. = 8 lib.

SCHO-

SCHOLION XI.

229. *Subinde compendiis locus datur, quæ* Practicæ Italicæ *nomen ferunt. Ex iis utilissima commemoramus. Nimirum quoniam per regulam trium ad tres numeros datos invenitur quartus proportionalis* (§. 215.), *primus & secundus* (§. 130.) *vel etiam primus & tertius* (§. 132.) *per eundem si fieri potest, numerum exacte dividantur & quoti in ipsorum loca surrogentur: ceu ex subsequente apparet exemplo.*

Pretium 3. Lib. *est* 9 Thal. *quantum* 7 libr.
3) 1 3 3

Fac. 21. Thal.

Pretium 14. Lib. *est* 26 Thal. *quant.* 7. libr.
7) 2 2)— 1

Fac. 13 Thal.

CHOLION XII.

230. *Si numerus primus vel tertius fuerit* 1 & *alter eorum non nimis magnus, medius autem heterogeneus, absque reductione in* schol. 5 (§. 223.) *præscripta calculus initur, ut sequens exemplum docet.*

Pret. 1 Lib. *est* 3 th. 8 gr. 6 num. *quant.* 5. L.
5

16 th. 18 gr. 6 num.

Manifestum scilicet est, bis 6 nummos conficere grossum unum; adeoque quinquies 6 grossos 2, & nummos 6. Similiter ter 8 grossi thalerum 1, & insuper bis 8 grossos 16 efficiunt. Quod si ergo thalerus iste 15 reliquis, & 2 priores grossi 16 reliquis addantur; prodibit pretium quæsitum 16 th. 18 gr. 6 num.

SCHOLION XIII.

231. *Si duo termini ejusdem denominationis unitate differant, singulari quodam compendio utimur, quod ex subjunctis exemplis manifestum. E. gr. Pretium* 5 *librarum est* 30 *thalerorum, quantum erit* 4 *librarum? R. Quoniam pretium* 4 *librarum una parte quinta deficere debet a pretio* 5 *librarum; pretium datum* 30 *dividatur per* 5 *&* *quotus* 6 *ab eodem subtrahatur, relinquitur quæsitum* 24. *Item: pretium* 8 *librarum est* 24. *thalerorum, quantum erit librarum* 9? *R. Quia pretium* 9 *librarum una parte octava excedit pretium* 8 *librarum, pretium datum* 24 *dividatur per* 8 *&* *quotus* 3 *eidem addatur, summa* 27 *erit quæsitum.*

SCHOLION XIV.

232. *Nonnunquam compendiis pluribus una uti datur.* E. gr.

Pret. 100. libr. *est* 30 th. 4 gr. *quant.* 50 lib.
50) 2. 2) ———— 1
Fac. 15 th. 2 gr.

It Pret. 60 libr. *est* 80 th. *quant.* 2520 lib.
60) 1 6 42
———— ————
480 6
7 7
————
Fac. 3360 thal.

CA-

CAPUT VII.

DE QUANTITATIBUS ÆQUIDIFFERENTIBUS.

DEFINITIO LIV.

233. Si in ſerie trium quantitatum eadem fuerit differentia primæ & ſecundæ, quæ ſecundæ ac tertiæ; eas *continue æquidifferentes* voco. Si vero in ſerie quatuor eadem fuerit differentia primæ & ſecundæ, quæ tertiæ ac quartæ, *diſcretim æquidifferentes* appello. Ita 3, 6, 7 & 10 ſunt numeri diſcretim æquidifferentes: 3, 6 & 9 numeri continue æquidifferentes.

SCHOLION.

234. *Dicuntur hæ quantitates vulgo* Arithmetice proportionales; *& vere proportionales, de quibus ante,* Geometrice proportionales, *appellari ſolent, ut ab iis diſtinguantur:*

COROLLARIUM I.

235. Si termini ſemper creſcunt, in continue æquidifferentibus terminus ſecundus eſt aggregatum ex primo & differentia; tertius ſumma ex ſecundo & differentia: Si decreſ-

cunt, primus eſt aggregatum ex ſecundo & differentia; ſecundus aggregatum ex tertio & differentia (§. 81.)

COROLLARIUM II.

236. Similiter in diſcretim æquidifferentibus ſi termini creſcunt, ſecundus eſt aggregatum ex primo & differentia quartus ex tertio & differentia; Si vero decreſcunt, primus eſt aggregatum ex ſecundo & differentia, tertius ex quarto & differentia (§. 81.).

THEOREMA XXXI.

237. *Si fuerint tres quantitates continue æquidifferentes, ſumma primæ & tertiæ eſt mediæ dupla.*

DEMONSTRATIO.

4. 7. 10
 7 4.
—————
14=14

Si enim termini creſcunt; ſecundus componitur ex primo & differentia, tertius ex ſecundo & differentia (§. 235.), adeoque ex primo & differentia dupla. Quare ſi tertio addatur primus; ſumma primi & tertii conſtabit ex primo duplo & differentia dupla. Erit adeo ſecundi dupla. *Q. e. d.* Eodem modo demonſtratio procedit, ſi termini decreſcunt.

SCHOLION.

238. *Si terminus primus ſit I, ſecundus II, tertius III. differentia D; demonſtratio ocularis erit iſtiusmodi;*

$$II = I + D$$
$$III = II + D$$

Ergo $III = I + 2D$

Hinc $III + I = 2I + 2D = 2II.$

THEOREMA XXXII.

239. *Si fuerint quatuor quantitates æquidifferentes, ſumma primæ & quartæ æqualis eſt ſummæ ſecundæ & tertiæ.*

DEMONSTRATIO.

$$\begin{array}{c} 3-5=8-10 \\ \underline{8 \quad\quad 3} \\ 13=13 \end{array}$$

Si termini creſcunt, ſecundus componitur ex primo & differentia; quartus ex tertio & differentia (§. 236.). Quare ſi primus quarto addatur, aggregatum ex primo, tertio & differentia conſtat: Si vero ſecundum tertio addas, aggregatum ex primo, differentia & tertio componitur. Sunt ergo aggregata inter ſe æqualia (§. 66.). *Q. e. d.*

Eodem modo demonſtratio procedit, ſi conſequentes termini fuerint antecedentibus minores.

SCHOLION I.

240. *Si terminus primus ſit I, ſecundus II, tertius III, quartus IV, differentia D; demonſtratio ocularis erit iſtiusmodi:*

$$\begin{array}{c} II = I + D \\ \underline{III \quad III} \\ II + III = III + I + D \end{array} \qquad \begin{array}{c} IV = III + D \\ \underline{I \quad I} \\ IV + I = I + III + D \end{array}$$

PROBLEMA XXIX.

241. *Inter duos numeros 9 & 13. medium æquidifferentem invenire.*

RESOLUTIO.

1. Addantur numeri dati 9 & 13.
2. Summa 22. dividatur bifariam ſive per 2. Quotus 11 erit numerus quæſitus (§. 237.).

PROBLEMA XXX.

242. *Datis tribus numeris 8, 5, 9, quartum æquidifferentem invenire.*

RESOLUTIO.

1. Numerus ſecundus 5 addatur tertio 9.
2. A ſumma 14 ſubtrahatur primus 8. Reſiduus 6 eſt quartus quæſitus. (§. 239.)

CAPUT VIII.

DE LOGARITHMIS.

DEFINITIO LV.

243. Series quantitatum juxta eandem rationem creſcentium vel decreſcentium vocatur *Progreſſio Geometrica.* E. gr. 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128, vel 729. 243. 81. 27. 9. 3. 1.

DEFINITIO LVI.

244. Series quantitatum ſecundum eandem differentiam creſcentium vel de-

decrefcentium dicitur *Progreſſio Arithmetica*. E. gr. 3. 6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30, vel 32. 28 24. 20. 16. 12. 8. 4.

DEFINITIO LVII.

245. Si numeris in ratione Geometrica progredientibus ſubſcribantur totidem alii æquidifferentes, dicuntur hi illorum *Logarithmi* : E. gr. Sint duæ progreſſiones:

Geom. 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256. 512.
Arith. 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

erit 0 logarithmus termini primi 1; 5. logarithmus ſexti 32; 7 logarithmus. octavi 128. &c.

COROLLARIUM I.

246. Si progreſſio arithmetica fuerit ſeries numerorum naturalium & a cyphra incipiat, ut in exemplo allato; logarithmi deſignant diſtantias numerorum proportionalium ab unitate.

COROLLARIUM II.

247. Cumque in progreſſione geometrica ab unitate incipiente termini ſint dignitates ordine naturali ſe mutuo excipientes (§. 175. 243.), ſi progreſſio arithmetica eadem ſit, quæ in exemplo allato, logarithmi ſunt exponentes dignitatum (§. 176.). E. gr. 2 eſt dignitas prima ejusque exponens 1, 64 dignitas ſexta ejusque exponens 6.

THEOREMA XXXIII.

248. *Si Logarithmus unitatis ſit* 0; *erit logarithmus facti æqualis aggregato ex logarithmis efficientium.*

DEMONSTRATIO.

Eſt enim ut unitas ad factorem unum ita factor alter ad factum (§.45.). Quare logarithmus facti eſt æquidifferentium quartus ad logarithmum unitatis & logarithmos efficientium (§. 245.), adeoque differentia inter logarithmum unitatis & ſummam logirithmorum efficientium(§. 242.).Sed logarithmus unitatis eſt 0, *per hypoth.* Ergo ſumma ex logarithmis efficientium eſt logarithmus facti *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

249. Cum factores quadrati ſint inter ſe æquales, hoc eſt, quadratum ſit factum ex radice in ſeipſam (§. 171.); logarithmus quadrati eſt duplus logarithmi radicis.

COROLLARIUM II.

250. Eodem modo patet, logarithmum cubi eſſe triplum (§. 173.); biquadrati quadruplum; potentiæ quintæ quintuplum; ſextæ ſextuplum &c. logarithmi radicis (§. 175.)

COROLLARIUM III.

251. Eſt ergo unitas ad exponentem dignitatis, ut logarithmus radicis ad logarithmum potentiæ ſeu ipſius dignitatis (§. 176. 179.).

COROLLARIUM IV.

252. Quare logarithmus potentiæ prodit, ſi logarithmum radicis multiplices per exponentem ejus (§. 45.); adeoque logarithmus radicis habetur, ſi logarithmus dignitatis per ejus exponentem dividitur (§. 144.).

SCHOLION.

253. *E. gr. 3. ſumma logarithmorum 1 & 2 eſt logarithmus producti 8 ex 2 in 4. Similiter 7 ſumma logarithmorum 2 & 5 eſt logarithmus producti 128 ex 4 in 32. Porro 3 logarithmus radicis quadratæ 8 eſt dimidius logarithmi 6 quadrati 64, & 2 logarithmus radicis cubicæ 4 eſt ſubtriplus logarithmi 6 cubi 64.*

THEOREMA XXXIV.

254. *Si logarithmus unitatis eſt 0, erit logarithmus quoti æqualis differentiæ logarithmorum diviſoris & dividendi.*

DEMONSTRATIO.

Eſt enim ut diviſor ad dividendum ita unitas ad quotum (§. 48.). Quare logarithmus quoti eſt æquidifferentium quartus ad logarithmos diviſoris & dividendi atque logarithmum unitatis (§. 245.), adeoque differentia inter logarithmum diviſoris & ſummam logarithmorum dividendi & unitatis (§. 242.). Sed logarithmus unitatis eſt 0, *per hypoth.* Ergo differentia logarithmi diviſo-

ris a logarithmo dividendi est logarithmus quoti. *Q. e. d.*

SCHOLION I.

255. *E. gr.* 2. *differentia inter* 7 & 5 *est logarithmus quoti* 4 *ex* 128 *per* 32. *Similiter* 5 *differentia inter* 8 & 3 *est logarithmus quoti* 32 *ex* 256 *per* 8.

SCHOLION II.

256. *Pro logarithmis numerorum* 1, 10, 100, 1000, 10000 *assumserunt Tabularum conditores* 0, 1, 2, 3, 4; *sive ut intermediorum logarithmos per fractiones decimales exprimerent* 0,00000000, 1.00000000, 2.00000000, 3.00000000, 4.00000000. *Hincque laboriosissimo modo omnium numerorum logarithmos ab* 1 *usque ad* 10000; *immo postea usque ad* 100000 *deduxerunt, quemadmodum in Elementis docetur. Characteristica igitur logarithmorum pro numeris ab* 1 *ad* 10 *est* 0; *pro numeris a* 10 *ad* 100 *est* 1; *pro numeris a* 100 *ad* 1000 *est* 2 *&c.*

PROBLEMA XXXI.

257. *Invenire logarithmum pro numeris majoribus, quam in Canone continentur, minoribus tamen* 10,000,000.

RESOLUTIO.

1. Resecentur 4 notæ ad sinistram numeri dati & earum ex canone excerpatur logarithmus.

2. Cha-

2. Characteristicæ tot addantur unitates, quot notæ ad dextram residuæ (§. 256.).
3. Logarithmus inventus subtrahatur a proxime sequente in canone.
4. Inferatur: ut differentia numerorum in canone evolutorum ad differentiam tabularem logarithmorum ipsis respondentium; ita notæ residuæ numeri dati ad differentiam logarithmicam *per probl.* 28. (§. 215.) inveniendam: quæ si
5. Addatur logarithmo *per n.* 1. & 2 invento; summa erit logarithmus quæsitus.

E. gr. Quæritur logarithmus numeri 92375. Reseca quatuor notas 9237 & characteristicam 3 logarithmi iis in tabulis minoribus respondentis 3. 9655309 auge unitate. Hinc

e logarith. numeri	9238 =	3. 9655780
subduc. log. num.	9237 =	3. 9655309
relinquitur differ. tab.	- -	471

Inferatur : 10 — 471 — 5
5) 2 ——— 1 (§. 229.).
235

Jam logarithmo	4. 9655309
addatur different. inventa	235
Summa est logar. quæs.	4. 9655544

SCHOLION.

258. *Differentiæ equidem logarithmorum non sunt differentiis numerorum proportionales: ad praxin tamen, ubi in minimis scrupulosi non sumus, metho-*

dus

dus tradita sufficit, si præsertim notæ residuæ numeri dati non fuerint adeo multæ. Certe in nostro casu adeo exactum reperimus, ut accuratior in tabulis majoribus Briggii *non occurrat.*

PROBLEMA XXXII.

259. *Invenire logarithmum fractionis, cujus numerator minor denominatore.*

RESOLUTIO.

1. Logarithmus numeratoris subtrahatur a logarithmo denominatoris.
2. Residuo præfigatur signum subtractionis —.

E. gr. Quærendus est logarithmus fractionis $\frac{3}{7}$.

Logarithmus 7 = 0. 8450980
Logarithmus 3 = 0. 4771213

Logarith. $\frac{3}{7}$ = — 0. 3679767

DEMONSTRATIO.

Cum fractio sit quotus, ex divisione numeratoris per denominatorem emergens (§. 165.); logarithmus ejus est differentia logarithmorum numeratoris ac denominatoris (§. 254.), adeoque si numerator minor denominatore, major logarithmus e minore subtrahendus, quo in casu differentia evadit negativa (§. 80.) *Q. e. d.*

SCHOLION.

260. *Logarithmum fractionis propriæ esse negativum, si unitatis sit* 0, *jam notavit* Stifelius, &

& mirum non est. Fractio enim minor unitate (§. 151.). Sed unitatis logarithmus est 0 *(§. 256.). Ergo fractionis logarithmus est nihilo minor.*

COROLLARIUM I.

261. Cum in fractione spuria $\frac{9}{5}$ numerator sit major denominatore; ejus logarithmus habetur, si logarithmus denominatoris à logarithmo numeratoris subtrahitur (§. 165. 254.).

Logarithmus 9 = 0.9542425
Logarithmus 5 = 0.6989700

Logarithmus $\frac{9}{5}$ = 0.2552725

COROLLARIUM II.

262. Quoniam integra cum adhærente fractione $3\frac{2}{7}$ ad fractionem spuriam $\frac{23}{7}$ reduci possunt (§. 154.); eodem modo invenietur eorum logarithmus.

Logarithmus 23 = 1.3617278
Logarithmus 7 = 0.8450980

Logarithmus $3\frac{2}{7}$ = 0.5166298

PROBLEMA XXXIII.

263. *Invenire numerum logarithmo respondentem, qui in tabulis accuratus non occurrit.*

RESOLUTIO.

I. Si numerus, cui convenit logarithmus, inter 1000 & 10000 cadit, hoc est, si characteristica fuerit 3 (§. 256.).

1. Lo-

1. Logarithmus proxime minor dato ſubtrahatur a proxime majore, itidemque a logarithmo dato.
2. Inferatur: ut differentia prior ad 100, ita ſecunda ad partes centeſimas *per probl.* 28. (§. 215.) inveniendas & numero, qui logarithmo proxime minori in tabulis reſpondet, addendas, ut habeatur numerus prope verus, cui logarithmus datus convenit.

E. gr. Quæratur numerus reſpondens Logarithmo 3. 7589982

Logarithmus proxime	major	3. 7590632
	minor	3. 7589875
Differentia prima		757
Logarithmus datus		3. 7589982
proxime minor		3. 7589875
Differentia ſecunda		107

757 – 100 – 107
100
10700

107.00 (14
757 :
313.0
302 8
10 2

Cum numerus logarithmo minori conveniens ſit 5741; quæſitus erit $5741\frac{14}{100}$.

II. Si numerus, cui convenit logarithmus datus, inter 1 & 1000 locum reperiat, hoc eſt, ſi characteriſtica fuerit 0, 1 vel 2 (§. 256.), chacteriſtica mutatur in 3 & logarithmus quæritur inter 1000 & 10000: qui enim ibi eidem

dem respondet numerus, tot fractiones decimales adjunctas habet, quot characteristicæ unitates accessere (§. 256.)

E. gr. Quæratur numerus logarithmo 1. 9201662 conveniens. Cum in tabulis proxime minori respondeat numerus 83; logarithmus idem evolvitur sub characteristica 3 post 8300, ubi proxime majori respondet numerus 83. 21. Est itaque quæsitus 83 $\frac{21}{100}$. Quodsi fractionibus his non fueris contentus, per casum primum minores istis inveniri possunt.

PROBLEMA XXXIV.

264. *Invenire numerum convenientem logarithmo majori iis, qui in tabulis continentur.*

RESOLUTIO.

1. A logarithmo dato subtrahatur logarithmus numeri 10, vel 100, vel 1000, vel 10000, donec relinquatur logarithmus ultimo tabulæ minor.
2. Quæratur numerus ei respondens (§. 263.) &
3. Multiplicetur per 10, vel 100, vel 1000, vel 10000. Factum est numerus quæsitus (§. 256.)

E. gr. Quærendus est numerus logarithmi 7. 7589982, Subtrahatur logarithmus numeri 10000, qui est, 4. 0000000, ut relinquatur 3. 7589982, cui respondens numerus 5741 $\frac{14}{100}$ ducatur in 10000. factum 57411400 erit nuermus quæsitus.

SCHOLION.

265. *Facile apparet, ſubtrahi poſſe logarithmum numeri cujuscunque in tabula occurrentem, modo per eundem numerum multiplicetur, qui logarithmo reſiduo reſpondet. Sed operatio tædioſa evadit.*

PROBLEMA XXXV.

266. *Invenire numerum dato logarithmo defectivo reſpondentem.*

RESOLUTIO.

1. Dato logarithmo defectivo addatur logarithmus ultimus tabulæ ſive numeri 10000, hoc eſt, ille ab hoc ſubtrahatur.
2. Logarithmo reſiduo conveniens numerus quæratur (§. 263.). Dico, hunc eſſe numeratorem fractionis, cujus denominator eſt 10000.

E. gr. Quæratur fractio reſpondens Logarithmo defectivo — 0. 3679767. Hic ex
4. 0000000 ſubd.

relinquit 3. 6320233, cuo convenit numerus 4285 $\frac{71}{100}$ Eſt ergo fractio quæſita $\frac{428571}{1000000}$.

DEMONSTRATIO.

Cum fractio ſit quotus ex diviſione numeratoris per denominatorem emergens (§. 165.); erit unitas ad fractionem ut denominator ad numeratorem (§. 48.). Sed ut unitas ad fractionem dato logarith-

rithmo defectivo respondentem, ita 10000 ad numerum logarithmo residuo convenientem (§. 248. 45.): Ergo si 10000 sumatur pro denominatore, erit numerus iste numerator fractionis quæsitæ (§. 218.). *Q. e. d.*

PROBLEMA XXXVI.

267. *Datis tribus numeris invenire quartum proportionalem.*

RESOLUTIO.

1. Logarithmus secundi addatur logarithmo tertii.
2. Ab aggregato subtrahatur logarithmus primi.

Residuus est logarithmus quarti quæsiti (§. 215. 248. 254.).

E. gr. Sint numeri dati 4, 68 & 3.

Logarithm.	68 =	1.8325089
Logarithm.	3 =	0.4771213
Aggregatum	=	2.3096302
Logarithmus	4 =	0.6020600
Logarith. quæs.		1.7075702,

cui in Tabulis respondet numerus 51.

SCHOLION.

268. *Problematis hujus usus præstantissimus in Trigonometria elucet: cujus gratia pro numeris etiam naturalibus quæsiti sunt a* Briggio *&* Vlacco *Logarithmi, cum* Neperus *tantum canonem utut diversæ indolis logarithmorum pro sinibus & tangen-*

 tibus

tibus construxisset. Tyrones igitur hanc de Logarithmis doctrinam tantisper seponant, donec ad Trigonometriam pedem promoverint.

CAPUT IX.

DE FRACTIONIBUS DECIMALIBUS.

DEFINITIO LVIII.

269. *Fractio decimalis* est, cujus denominator est *articulus* quidam *primarius* 10, 100, 1000, 10000 &c. (§. 218.).

COROLLARIUM I.

270. Progrediuntur adeo denominatores in ratione decupla.

SCHOLION.

271. E. gr. *Si fuerit fractio decimalis* $\frac{342857}{100000}$, *eadem æquivalet huic seriei:* $\frac{3}{1}+\frac{4}{10}+\frac{2}{100}+\frac{8}{1000}+\frac{5}{10000}+\frac{7}{100000}$, *cujus denominatores* 1. 10. 100. 1000. 10000. 100000 *in ratione decupla progrediuntur.*

COROLLARIUM. II.

272. Quoniam Logarithmi progressionis geometricæ 1. 10. 100. 1000. 10000. 100000 sunt 0. 1. 2. 3. 4. 5. (§. 256.); si fractiones decimales sub forma numerorum integrorum scri-

ſcribantur, veluti in noſtro caſu loco $\frac{342857}{100000}$ aut $\frac{3}{1}+\frac{4}{10}+\frac{2}{100}+\frac{8}{1000}+\frac{5}{10000}+\frac{7}{100000}$, loco denominatorum numeratoribus ſolitarie poſitis ſcribatur 3. 42857 (§. 219.), loco denominatorum numeratoribus ſolitarie poſitis opportune tanquam *apices* adjiciuntur logarithmi. Ita loco fractionis $\frac{342857}{100000}$ ſcribimus $3^{\circ}.$ $4' 2'' 8''' 5^{IV} 7^{V}$.

COROLLARIUM III.

273. Quoniam apices, qui ſunt logarithmi denominatorum fractionum decimalium, in ſerie numerorum naturalium progrediuntur; ſufficit notæ ultimæ adjici apicem convenientem, ceteris omiſſis, veluti in noſtro caſu $3. 42 857^{V}$.

DEFINITIO LIX.

274. *Fractio decimalis exacta eſt*, quæ veram exhibet rationem partis, quam deſignat, ad totum.

E. gr. o. $8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ exprimit rationem partis 4 ad totum 5 veram, cum ſit $8 : 10 = 4 : 5$ (§. 130.).

DEFINITIO LX.

275. *Fractio decimalis approximans* eſt, quæ rationem partis, quam deſignat, ad totum exhibet prope veram, nempe vel vera minorem, vel majorem, defectu tamen vel exceſſu infra unitatem notæ ultimæ convenientem exiſtente.

E. gr. $\frac{3}{7} >$ o. 42857, ſed $<$ o. 42858. Exprimit adeo fractio approximans $\frac{42857}{100000}$ ra-

tionem non nisi prope veram defectu scilicet existente minore, quam $\frac{1}{100000}$.

DEFINITIO LXI.

276. *Notæ* fractionum decimalium *ejusdem ordinis* dicuntur, quarum iidem sunt denominatores vel apices.

E. gr. Si duæ fuerint fractiones decimales 0. 42857 & 0. 0047, notæ 8 & 4 ejusdem ordinis sunt, quoniam utrique respondens denominator est 1000 vel apex‴: nam 8 designat $\frac{8}{1000}$ & 4 denotat $\frac{4}{1000}$.

PROBLEMA XXXVII.

277. *Fractiones decimales addere vel a se invicem subtrahere.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO

Quoniam fractiones decimales perinde ac numeri integri constant ex notis, quarum unitates in ratione decupla progrediuntur (§. 270.); notis ejusdem ordinis sub se invicem scriptis additio & subtractio eodem modo peragitur ac in numeris vulgaribus (§. 73. 78.), nisi quod in approximantibus locus ultimus sit incertus (§. 275).

Vide exemplum

I. Additionis:

3.50782^{v}	0.0638^{iv}
0.0003	0.00562^{v}
51.247	7.138
54.75512	7.20742

II.

II. Subtractionis.

2.7864^{iv}	0.95436^{v}
$-\ 0.158$	0.08512
2.6284	0.86924

PROBLEMA XXXVIII.

278. *Fractiones decimales per se invicem multiplicare.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

Si fractiones decimales ad formam numerorum integrorum reducantur (§. 219.), multiplicatio peragitur ut in integris (§. 85.), hoc unice notato, quod, quoniam apices sunt logarithmi denominatorum (§. 272.), apex facti notarum in se invicem ductarum inveniatur, si earum apices addantur (§. 248.).

E. gr. Si multiplicanda fuerit fractio decimalis $\frac{42857}{100000}$ per $\frac{47}{10000}$ hoc est, 0.42857^{v} per 0.0047^{iv} multiplicatio peragitur communi more ducendo 42857 primum in 7 & deinde in 4 sive 40. Quoniam vero apex ultimus multiplicandi est 5 & multiplicatoris 4; summa 9 dat apicem ultimum producti: unde apparet a sinistris adjiciendas esse tres cyphras, quarum prima puncto notata designat locum integrorum.

$$\begin{array}{r} 0.42857 \\ 0.0047 \\ \hline 299999 \\ 171428 \\ \hline 0.002014279 \end{array}$$

PROBLEMA XXXIX.

279. *Fractionem decimalem per decimalem dividere.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

Si fractiones decimales ad formam numerorum integrorum reducantur (§. 219.), divisio peragitur ut in numeris integris (§. 87.), hoc unice notato, quod, quoniam apices sunt logarithmi denominatorum (272.), apex quoti inveniatur, si apex divisoris ab apice dividendi subtrahatur (§. 254.) & dividendo adjungantur cyphræ, si divisor major fuerit vel dividendum non metiatur.

E. gr. Si 0. 002014279 dividatur per 0. 0047, quotus est 0. 42857 (§. 278. 144.). Nimirum 2014279 dividitur per 47, ut obtineatur quotus 42857. Jam cum notæ divisoris 4 conveniat apex 3 & notæ dividendi 0 apex 4, differentia 1 est apex notæ primæ quoti 4. Cum adeo quotus incipiat a partibus decimis, ut omnia loca compleantur, eidem præfigitur cyphra, cum nullum fractioni adhæreat integrum. Similiter si 0. 002014279 dividatur per 0. 42857 quotus est 0. 0047 (§. *cit.*). Nimirum 2014279 dividitur per 42857, ut obtineatur quotus 47. Jam cum notæ dividendi 0 conveniat apex 4 & notæ divisoris 4 apex 1, differentia 3 est apex notæ quoti 4. Cum adeo quotus incipiat a particulis millesimis (§. 272.), eidem præfigendæ sunt cyphræ 3, ut habeatur fractio completa 0. 0047.

ELE-

ELEMENTA
ANALYSEOS MATHEMATICÆ
DE
ARITHMETICA
SPECIOSA.

CAPUT I.
DE
ARITHMETICA RATIONALIUM.

DEFINITIO I.

280. *Analysis mathematica* est methodus resolvendi problemata mathematica.

DEFINITIO II.

281. *Arithmetica speciosa* est, quæ computum quantitatum seu numerorum

indeterminatorum docet. Vocatur etiam *Logistica speciosa.*

HYPOTHESIS I.

282. *Quantitatum datarum signa sint literæ Alphabeti priores,* a, b, c, d &c. *quæsitarum postremæ* z, y, x &c. *Quantitates æquales eadem litera indigitentur.*

SCHOLION.

283. *Nempe cum quantitates datæ ac quæsitæ tanquam distinctæ intellectui repræsententur per diversas notiones; eædem quoque tanquam distinctæ repræsentandæ sunt imaginationi per signa diversa.*

HYPOTHESIS II.

284. *Si quantitatum denominandarum quædam relationes mutuæ dantur, aut aliunde tanquam cognitæ supponi possunt; eas quoque in denominatione exprimi consultum est.* E. gr. Si fuerint duæ quantitates quæsitæ, quarum una alterius tripla, & una vocetur x, major rectius dicetur $3x$, quam y.

SCHOLION.

285. *Quinam fructus ex commoda quantitatum denominatione exspectandi, ex subsequentibus patebit. Breviatur calculus idemque facilitatur: resolutiones problematum sæpe magis genuinæ inveniuntur. Alii suo loco sese offerent. Plura circa denominationem moneri possent, nisi consultius judicaremus, ea per exemplum, quam per præcepta doceri.*

HY-

HYPOTHESIS III.

286. *Signa operationum arithmeticarum retineantur, quæ in Arithmetica communi tradidimus (§. 42. 44. 47. 50. 178. 209.), nisi quod quantitates se mutuo dividentes, ubi commodum fuerit, instar fractionum scribantur.*

E. gr. $\frac{a}{b} = a:b$; $\frac{3}{4} = 3:4$

SCHOLION.

287. *Vulgo multiplicationis signum est* x. E. gr. a b *scribitur* a x b. *Sed cum hoc signum facile cum litera* x *a typothetis confundatur; usus ejus merito improbatur.*

HYPOTHESIS IV.

288. *Si vel unus, vel ambo factores ex pluribus literis componuntur; compositi parenthesi ( ) includuntur.* E. gr. Factum ex $a+b-c$ in d ita scribitur: $(a+b-c)\ d$. Similiter factum ex $a+b-c$ in $d-g$ hunc in modum: $(a+b-c)\ (d-g)$.

SCHOLION.

289. *Vulgo hæc facta ita scribunt:*

$$d \times \overline{a+b-c} \ \& \ \overline{a+b-c} \times \overline{d-g}.$$

Sed cum hæc scriptio typothetis molestias creet, inprimis si ex alio capite linearum supra literas ducendarum

darum numerus multiplicatur, signis Leibnitianis utendum esse judicamus.

HYPOTHESIS V.

290. *Si quantitatum se mutuo dividentium una, vel ambæ ex literis pluribus componuntur; signo parentheseos ( ) similiter utimur, nisi circumstantiæ singulares suadeant, eas fractionum instar scribi.* E. gr. Quotus ex $a+b$ per c ita scribitur; $(a+b):c$. Quotus vero ex $a+b$ per $c-d$ ita exprimitur; $(a+b):(c-d)$. Similiter $a:(a+b)$ designat quotum ipsius a per $a+b$ divisi. Iidem quoti communiter ita scribuntur: $\frac{a+b}{c}$, $\frac{a+b}{c-d}$, $\frac{a}{a+b}$.

HYPOTHESIS VI.

291. *Exponentes indeterminati tam rationum, quam dignitatum indicentur per m, n, r, s, t &c.* E. gr. x^m, y^n, z^r, &c. designant potentias indeterminatas diversi generis (§. 178.); mx, ny, rz, multipla vel submultipla diversa quantitatum x, y, z, prout m, n, r vel numeros integros, vel fractos designant (§. 98.)

HYPOTHESIS VII.

292. *Si radix ex pluribus literis componitur, parenthesi includitur & exponens*

nens ipsi suffigitur, ut ante. E. gr. $(a+b-c)^2$ designat quadratum ex $a+b-c$; $(a+b-c)^m$ potentiam quamlibet seu indeterminatam ipsius $a+b-c$.

SCHOLION.

293. *Communiter ita scribunt:* $\overline{a+b-c}^{\,2}$. $\overline{a+b-c}^{\,m}$

DEFINITIO III.

294. *Quantitas* signo + affecta dicitur *positiva*, item *affirmativa* atque *nihilo major*: quæ vero signo — afficitur, *privativa*, item *negativa* atque *nihilo minor*, a nonnullis *absurda*.

COROLLARIUM I.

295. Quoniam + est signum additionis (§. 42.): — vero signum subtractionis (§. 44.) quantitas positiva prodit, si vera aliqua nihilo additur, e. gr. $0+3=+3$, $0+a=+a$; privativa relinquitur, si quantitas aliqua vera ex nihilo subtrahitur, e. gr. $0-3=-3$, $0-a=-a$.

SCHOLION I.

296. *Ponamus, te habere nummorum nihil tibique donari* 100: *habebis ergo* 100 *nummos, adeoque plus nihilo. Plus nempe habes quam ante. Hi nummi quantitatem positivam constituunt. Ponamus e contrario, te nihil habentem solvere debere* 100 *nummos;* 100 *ergo nummorum debitum contrahes, adeoque, antequam solutio fiat minus nihilo habebis. Solvendi enim sunt* 100 *nummi, ut nihil habeas.*

Hoc

Hoc debitum quantitas negativa est. Notandum vero quantitates positivas initio vel solitarie positas signo nullo affici. Cur vero positivæ dicantur nihilo majores, negativæ nihilo minores; ex corollario patet.

COROLLARIUM II.

297. Sunt adeo quantitates privativæ verarum, per quas intelliguntur, defectus; consequenter non quantitates veræ.

SCHOLION II.

298. *Defectum per eam quantitatem metimur, quæ deficit, & sic intelligibilis evadit.*

COROLLARIUM III.

299. Si residuo additur, quod fuerat ablatum, ea prodit quantitas, ex qua subtractio facta (§. 81.) Ergo $-a+a=0$, $-3+3=0$ (§. 295.), hoc est, $-a$ & $+a$, itemque -3 & $+3$ se mutuo destruunt.

THEOREMA I.

300. *Quantitas quælibet pro unitate assumi potest.*

DEMONSTRATIO.

Quantitas enim quælibet in se una est (§. 2.), nec ad aliam determinatam tanquam ad unitatem jam refertur (§. 10.) Ergo ipsa pro unitate assumi potest (§. 3.). *Q. e. d.*

PRO-

PROBLEMA I.

301. *Quantitates tam eodem, quam diversis signis affectas addere.*

RESOLUTIO.

1. Si quantitates eadem litera notatæ eodem signo afficiuntur; numeri iis præfixi adduntur ut in Arithmetica communi.
2. Si signis diversis afficiuntur, additio mutatur in subtractionem & residuo præfigitur signum majoris.
3. Quantitates diversis literis notatæ junguntur mediante signo + (§. 286.)

$$\begin{array}{l} 4a+2b-2c-5d-g \\ 5a-2b+6c+2d-3g \\ \hline 9a+4c-3d-4g \end{array} \qquad \begin{array}{c} a-b \\ c \\ \hline a-b+c \end{array}$$

DEMONSTRATIO.

Cum litera quælibet, qua quantitas aliqua indigitatur, pro unitate assumi possit (§. 300.); erit $a+a+a+a=4a$, consequenter $4a+5a=9a$ (§. 73.). Eodem modo patet esse $-g-3g=-4g$. *Quod erat unum.*

Quoniam $6c=4c+2c$, *per demonstr.* erit $6c-2c=4c+2c-2c$ (§. 69.). Sed $2c-2c=0$ (§. 299.). Ergo $6c-2c=4c$. Similiter $-5d=-3d-2d$, *per demonstr.* Sed $-5d+2d=-3d-2d+2d$ (§. 66.) & $-2d+2d=0$ (§. 299.). Ergo

Ergo $-5d+2d=-3d$. *Quod erat alterum.*

Tertium per se patet (§. 286.).

SCHOLION.

302. *Ut hic calculus facilius intelligatur, ponamus* a *denotare thalerum*, b *grossum*, c *nummum; habebimus*

$$
\begin{array}{l}
7a-9b+5c=7\text{ th.}-9\text{ gr.}+5\text{ num.}\\
3a+5b-9c=3\quad+5\quad-9\\
\hline
10a-4b-4c=10\text{th.}-4\text{gr.}-4\text{num.}
\end{array}
$$

Atque per idem exemplum facilius quoque capitur ratio, cur in casu diversitatis signorum additio in subtractionem mutetur & residuo signum majoris quantitatis relinquatur. Nimirum in summa 10 *thalerorum deficiunt* 9 *grossi: quamobrem si quinque addantur, defectus minuitur & ad* 4 *reducitur. Quoniam vero non* 5 *grossi integri, sed demtis* 9 *nummis summæ adjiciendi, summa* 10 th.—4 gr. *excedit genuinam* 9 *nummis, qui adeo auferendi. Jam cum in numero superiori, cui inferior additur, occurrant* 5 *nummi, hi quidem actu auferri possunt: qui vero adhuc desiderantur* 4, *tanquam defectus notandi. Et hac quidem ratione regula a primo inventore detecta.*

THEOREMA II.

303. *In subtractione quantitatum compositarum signa subtrahendæ mutantur in contraria, nempe + in — & — in +.*

DE-

DEMONSTRATIO.

Si $c+d$ fuerit ſubtrahenda ex $a+b$; differentiam eſſe debere $a+b-c-d$, adeoque ſigna + in quantitate ſubtrahendæ in — mutari, ex hypoth. 3. (§. 286.) patet. Sed ſi $c-d$ ſubtrahenda ex $a+b$ & integrum c ſubtrahitur, quantitas major ſubducta, quam fieri debebat. Ergo quod plus juſto ſubtractum eſt d, iterum addendum. Prodit ergo $a+b-c+d$. *Q. e. d.*

PROBLEMA II.

304. *Quantitates tam eodem, quam diverſis ſignis affectas a ſe invicem ſubtrahere.*

RESOLUTIO.

1. Si quantitates eadem litera notatæ ſigna eadem habent & minor e majore ſubtrahenda; ſubtractio ut in Arithmetica communi (§. 78.) abſolvitur.
2. Si vero major e minore ſubducenda; contraria ratione minor e majore ſubtrahitur & reſiduo præfigitur ſignum —, ſi quantitates ſigno + afficiuntur; ſignum vero +, ſi ſigno — gaudent.
3. Si quantitates diverſa ſigna habent; in additionem mutatur ſubtractio & aggregato præfigitur ſignum ejus quantitatis, ex qua ſubtractio facta eſt.

4. Si quantitates diversis literis notatæ, signa subtrahendæ tantum in contraria mutantur.

$$\begin{array}{l} 8a - 5c + 9d = 8 \text{ th.} - 5 \text{ gr.} + 9 \text{ num.} \\ 6a - 8c - 7d = 6 \quad - 8 \quad - 7 \\ \hline 2a + 3c + 16d = 2 \text{ th.} + 3 \text{ gr.} + 16 \text{ num.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 9b + 15c - 7d + 8e - f \\ 6b + 20c - 9d - 9e + 7f \\ \hline 3b - 5c + 2d + 17e - 8f \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} a + b - c & a + d \\ d - e + f & c - e - g \\ \hline + b - c - d + e - f & a + d - c + e + g \end{array}$$

DEMONSTRATIO.

Cum qnantitates eadem litera notatæ sint vel unitates eædem, vel ejusdem unitatis multiplæ aut submultiplæ (§. 300.); erit $8a - 6a = 2a$ (§. 25. 78.) *Quod erat unum.*

Si quantitas major $20c - 9d$ ex minore $15c - 7d$ subtrahenda; erit residuum $15c - 7d - 20c + 9d$ (§. 303.). Sed $15c - 20c = -5c$ & $-7d + 9d = 2d$ (§. 301.). Ergo $15c - 7d - 20c + 9d = -5c + 2d$. *Quod erat alterum.*

Si $-9e + 7f$ subtrahi debent ex $8e - f$; erit residuum $8e - f + 9e - 7f$ (§. 303.). Sed $-f - 7f = -8f$ & $8e + 9e = 17e$ (§. 301.). Ergo $8e - f + 9e - 7f = 17e - 8f$. *Quod erat tertium.*

Quartum patet per theorema (§. 303.).

Aliter.

Aliter.

1. Signa quantitatis ſubtrahendæ mutentur in contraria (§. 303.): quo facto
2. Additio fiat (§. 301.) ſeu, quæ ſe mutuo deſtruunt, deleantur.

E. gr. ſi ex $9\,b + 15\,c - 7\,d + 8\,e - f$ ſubtrahi debet $6\,b + 20\,c - 9\,d - 9\,e + f$, fiat (§. 303.) $= 6\,b - 20\,c + 9\,d + 9\,e - f$; erit (§. 301.) reſiduum $3\,b - 5\,c + 2\,d + 17\,e - 2\,f$. Nimirum $+ 6\,b - 6\,b$, $+ 15\,c - 15\,c$, $-7\,d + 7\,d$, ſe mutuo deſtruunt (§. 299.).

THEOREMA III.

305. *Si quantitas poſitiva per poſitivam multiplicetur aut dividatur, in utroque caſu quantitas prodit poſitiva.*

DEMONSTRATIO.

Eſt enim in multiplicatione ut unitas ad factorem unum, ita alter ad productum (§. 45.) Sed uterque factor eſt poſitivus, *per hypoth.* Ergo & factum poſitivum eſſe debet. *Quod erat unum.*

Si $+a$ ducitur in $+b$, factum eſt $+ a\,b$, *per demonſtr.* Ergo ſi $+ab$ dividitur per $+a$ quotus erit $+b$; ſi per $+b$, quotus $+a$ (§. 144.). *Quod erat alterum.*

THEOREMA IV.

306. *Si quantitas negativa per positivam multiplicetur aut dividatur, in utroque casu quantitas prodit negativa.*

DEMONSTRATIO.

Multiplicare idem est ac quantitatem aliquam aliquoties sibimetipsi addere (§. 46.). Est vero summa quantitatum negativarum negativa (§. 301.). Ergo factum ex negativa in positivam negativum est. *Quod erat unum.*

Factum ex $-a$ in $+b$ est $-ab$ *per demonstr.* Ergo si $-ab$ dividitur per $+b$, quotus est $-a$ (§. 144.). *Quod erat alterum.*

THEOREMA V.

307. *Si quantitas negativa per negativam multiplicetur aut dividatur, quantitas positiva prodit.*

DEMONSTRATIO.

Quantitas privativa per privativam proprie loquendo multiplicari nequit (§. 45.): id quod ipsa notio quantitatis privativæ insinuat (§. 297.), utpote quæ repugnat actui positivo, qualis est iterata ejusdem quantitatis additio, in qua multiplicatio consistit (§. 46.). Quare hæc multiplicatio proprie

proprie tantum locum habet, ubi privativæ positivis junguntur.

Sit itaque multiplicandum $a-b$ in $a-b$. Cum a considerari possit ut radix binomia, cujus pars prima $a-b$, secunda vero $+b$, quadratum partis primæ habetur, si a quadrato a^2 subtrahatur duplum factum ex prima in secundam, una cum quadrato partis secundæ, (§. 183) sed duplum factum ex prima in secundam $= 2ab-2b^2$ (§. 306.) quadratum vero secundæ $= b^2$ (§. 305.). Quare si hæc facta a quadrato a^2 subtrahantur, erit quadratum partis primæ, seu $(a-b)(a-b)$ (§. 171.). $= a^2-2ab+2b^2-b^2 = a^2-2ab+b^2$. §. 304.) Unde apparet factum ex $-b$ in $-b$ esse $+b^2$. *Quod erat unum.*

In divisione quærimus, quoties quantitas una in altera contineatur (§. 48.) Divisurus ergo quantitatem privativam per privativam quærit, quoties defectus unus in altero contineatur (§. 297.): quotus adeo, qui idem indicat (§. 48.) utique quantitas positiva esse debet. *Quod erat alterum.*

THEOREMA VI.

308. *Si quantitas positiva per negativam multiplicatur aut dividitur, quantitas privativa prodit.*

DEMONSTRATIO.

Cum duæ quantitates ſe mutuo multiplicantes idem factum gignant (§. 141.), perinde erit ſive $-a$ in $+b$, ſive $+b$ in $-a$ ducatur; ſed $-a$ ductum in $+b$ $= -ab$ (§. 306.) Ergo etiam $+b$ ductum in $-a = -ab$. *Quod erat unum.*

Factum ex $-a$ in $-b$ eſt $+ab$ (§. 307.). Ergo ſi $+ab$ dividis per $-a$, quotus eſſe debet $-b$. (§. 144.) *Quod erat alterum.*

THEOREMA VII.

309. *In multiplicatione ac diviſione eadem ſigna efficiunt* $+$, *diverſa* $-$.

DEMONSTRATIO.

Si quantitates ſe mutuo multiplicantes aut dividentes fuerint poſitivæ vel privativæ; quantitas prodit in utroque caſu poſitiva (§. 305. 307.): ſi vero altera privativa, altera poſitiva, quantitas prodit privativa (§. 306. 308.). Ergo eadem ſigna efficiunt $+$, diverſa $-$. *Q. e. d.*

PROBLEMA III.

310. *Quantitates tam eodem quam diverſis ſignis affectas in ſe invicem ducere.*

RESOLUTIO.

Omnia hic fiunt ut in Arithmetica communi (§. 85.), niſi quod notetur

re-

regula: *eadem ſigna faciunt + diverſa* —)§. 309.).

$$\begin{array}{r} a+c \\ b+d \\ \hline +ad+cd \\ ab+bc \\ \hline ab+ad+bc+cd \end{array} \qquad \begin{array}{r} a+b-d \\ a-b-d \\ \hline -ad-bd+dd \\ -ab-bb+bd \\ aa+ab-ad \\ \hline aa-bb-2ad+dd \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10=8+4-2 \\ 2=8-4-2 \\ \hline -16-8+4 \\ -32-16+8 \\ 64+32-16 \\ \hline 20=68-48 \end{array}$$

Item
$$\begin{array}{r} 8=10-2 \\ 7=10-3 \\ \hline -30+6 \\ 100-20 \\ \hline 56=100-50+6 \\ =50+6 \end{array}$$

PROBLEMA IV.

311. *Quantitates compoſitas dividere.*

RESOLUTIO.

Si quantitas una per alteram actu dividi poteſt, orta nempe ex diviſore in aliam (§. 144.); diviſio inſtituitur ut in numeris (§. 87.), notata tamen regula: *eadem ſigna faciunt* +, *diverſa* — (§. 309.).

In aliis casibus tantum observanda, quæ supra præcepimus (§. 8.).

E. gr. Dividere jubemur $aa-bb-2ad+dd$ per $a-b-d$.

$$
\begin{array}{r|l}
 & aa-bb-2ad+dd \;(a+b-d \\
a-b-d) & aa-ab-ad \\
\hline
 & +ab-bb-ad+dd \\
 & +ab-bb-bd \\
\hline
 & +bd-ad+dd \\
 & -ad+bd+dd \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

PROBLEMA V.

312. *Fractionem fractioni addere, aut unam ex altera subtrahere.*

RESOLUTIO.

Omnia hic fiunt ut in Arithmetica communi (§. 163. 164.)

E. gr. Sint fractiones addendæ $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$. Reductæ ad eandem denominationem erunt $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$, (§. 162.). Ergo

summa $\frac{ad+bc}{bd}$ (§. 301).

Similiter sit fractio $\frac{a}{b}$ subtrahenda ex $\frac{c}{d}$.

$\frac{c}{d}$. Reductæ erunt $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$, ut ante. Ergo differentia $\frac{bc-ad}{bd}$ (§. 304.).

PROBLEMA VI.

313. *Fractionem per fractionem multiplicare aut dividere.*

RESOLUTIO.

Denuo hic omnia fiunt ut in Arithmetica communi (§. 166. 168.)

E. gr. Sint fractiones se mutuo multiplicaturæ $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$; erit factum $\frac{ac}{bd}$.

Sint fractiones se mutuo divisuræ $\frac{ac}{db}$ & $\frac{a}{b}$; erit quotus $\frac{ac}{bd}.\frac{b}{a} = \frac{acb}{abd} = \frac{c}{d}$ (§. 159.)

COROLLARIUM I.

314. Cum $a = \frac{a}{1}$ (§. 39.);

erit factum ex a in $\frac{c}{d}$, hoc est, ex inte-

gra quantitate in fractam, $\frac{c}{d} \cdot \frac{a}{1} = \frac{ac}{d}$. Unde patet, numeratorem fractæ multiplicandum esse per integram, si fractio per integrum multiplicari debet: quemadmodum fit in Arithmetica communi (§. 167.),

COROLLARIUM II.

315. Ergo quotus ex $\frac{c}{d}$ per a, hoc est, ex quantitate fracta per integram divisa, $\frac{c}{d} \cdot \frac{1}{a} = \frac{c}{ad}$. Unde patet, denominatorem dividendi multiplicandum esse per divisorem & factum subscribendum numeratori immutato, si fractio per integrum dividenda.

PROBLEMA VII.

316. *Potentiam quamcunque per aliam ejusdem radicis multiplicare vel dividere.*

RESOLUTIO.

I. In multiplicatione addantur exponentes, summa est exponens facti.

x^3	y^m	y^m	a^m	x^m
x^4	y^m	y^n	a^r	x^s
x^7	y^{2m}	y^{m+n}	a^{m+r}	x^{m+s}

II. In

II. In divisione exponens dignitatis dividentis subtrahatur ab exponente dividendæ; residuum est exponens quoti.

$$\frac{x^7}{x^4} = x^3 \qquad \frac{y^{m+n}}{y^n} = y^m \qquad \frac{a^m x^n}{a^r x^s} = a^{m-r}\, x^{n-s}$$

DEMONSTRATIO.

Cum exponentes dignitatum in progressione Arithmetica a cyphra sive o incipiente (§. 176. 244.) digntates in Geometrica, cujus terminus primus est unitas (§. 175. 248.), progrediantur; illi pro harum Logarithmis recte habentur (§. 245.). Ergo summa exponentium, quos habent dignitates, se mutuo multiplicantes est exponens facti (§. 248.); differentia exponentium, quos habent dignitates semutuo divi-dentes, est exponens quoti (§. 254.). Q. e. d.

SCHOLION.

317. *Progressiones istæ hæ sunt:*
$x^0.\ x^1.\ x^2.\ x^3.\ x^4.\ x^5.\ x^6.\ x^7.$ &c.
o. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7 &c.
Nempe $x : x = x^1 : x^1 = x^0$ (§. 316.).
Sed $x : x = 1$ (§. 48.). *Ergo* $x^0 = 1$. (§. 65.)

PROBLEMA VIII.

318. *Potentiam quamcunque datam ad aliam dati exponentis evehere, aut ex* *ea-*

eadem dati ſimiliter exponentis radicem extrahere.

RESOLUTIO.

I. Quoniam potentia data intuitu ejus, ad quam evehenda, radix eſt (§. 171.) & exponentes logarithmi dignitatum exiſtunt *per demonſtr. in probl. præc.* (§. 316.): exponens potentiæ novæ habebitur, potentiæ datæ exponente in exponentem ejus ad quam evehi debet, ducto (§. 252.)

E. gr. Potentia x^m evecta ad dignitatem n eſt x^{mn}. Potentia y^3 evecta ad dignitatem 2 eſt y^6.

II. Non abſimili modo liquet, Exponentem radicis haberi, ſi exponens dignitatis datæ dividatur per exponentem radicis datum (§. 252.).

E. gr. Radix quadrata ex x^6 eſt x^3: radix n ex x^{mn} eſt x^m: radix n ex x^m eſt $x^{m:n}$.

COROLLARIUM I.

319. Eſt itaque $\sqrt{x} = x^{1:2}$, $\sqrt[3]{x} = x^{1:3}$ $\sqrt[n]{x^m} = x^{m:n}$ (§. 252), conſequenter quantitates irrationales ad expreſſionem rationalem reduci poſſunt.

SCHOLION.

320. *Quantum in analyſi commodi afferat hæc reductio, ex capite ſubſequente eluceſcet. Etenim*

ſi

si quantitates irrationales ad formam rationalium reducantur; peculiari pro iis calculo opus non est, sed rationalium instar tractari possunt.

CAPUT II.
DE ARITHMETICA IRRATIONALIUM.

PROBLEMA IX.

321. *Quantitates irrationales diversæ denominationis reducere ad eandem.*

RESOLUTIO.

Sint quantitates reducendæ $\sqrt[m]{x^n}$ & $\sqrt[s]{y^r}$. Quoniam $\sqrt[m]{x^n} = x^{n:m}$ & $\sqrt[s]{y^r} = y^{r:s}$ (§. 319.); diversitas denominationis ab exponentibus diversis pendet, exponentes vero fractiones sunt, quæ ad alias ipsis æquales, sed ejusdem denominationis reduci possunt (§. 162. *Arithm.*). Ergo quantitates surdæ reducuntur ad eandem denominationem, exponentibus earundem ad eandem reductis. Erit adeo $x^{n:m} = x^{ns:ms}$ & $y^{r:s} = y^{mr:ms}$ seu $x^{n:m} = \sqrt[ms]{x^{ns}}$ & $y^{r:s} = \sqrt[ms]{y^{mr}}$ (§. 319.).

E. gr.

E. gr. Sint quantitates reducendæ $\sqrt{2}$ & $\sqrt[3]{5}$. Quoniam $\sqrt{2} = 2^{1:2}$ & $\sqrt[3]{5} = 5^{1:3}$ (§. 319.); erunt reductæ $2^{3:6}$ & $5^{2:6}$ (§. 162. hoc est, $\sqrt[6]{2^3}$ & $\sqrt[6]{5^2}$ (§. 319.), seu, 2 actu ad potentiam tertiam & 5 ad secundam evehendo, $\sqrt[6]{8}$ & $\sqrt[6]{25}$.

PROBLEMA X.

322. *Quantitates irrationales ad simpliciorem expressionem reducere.*

RESOLUTIO.

Sit quantitas reducenda $\sqrt[m]{a^n x^m}$. Quoniam ea æqualis est ipsi $a^{n:m} x^{m:m}$ (§. 319.) & $x^{m:m} = x$ (§. 56) erit $\sqrt[m]{a^n x^m} = a^{n:m} x = x \sqrt[m]{a^n}$, Locum ergo habet reductio, si quantitas sub signo radicali per istiusmodi potentiam, quæ eundem cum radicali signo exponentem habet, divisibilis. Divisio nempe actu instituenda, quoto sub signo radicali relicto & divisoris radice eidem præfixa.

E. gr. Sit reducenda $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \cdot 2}$. Quoniam 8 est cubus perfectus, cujus radix 2: habebimus $\sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$. Eodem modo repe-

ritur

ritur $\sqrt[3]{24}=\sqrt[3]{8.3}=2\sqrt[3]{3}$; $\sqrt{18}=\sqrt{9.2}=3\sqrt{2}$; $\sqrt[4]{48}=\sqrt[4]{16.3}=2\sqrt[4]{3}$.

COROLLARIUM I.

323. Si quantitates irrationales ejusdem gradus ad ſimpliciorem expreſſionem reductæ ſub ſignis radicalibus eandem quantitatem relinquant; erunt inter ſe ut quantitates rationales ſignis præfixæ (§. 127.), conſequenter quantitates irrationales inter ſe commenſurabiles eſſe poſſunt.

E. gr. $\sqrt{8}=\sqrt{4.2}=2\sqrt{2}$ & $\sqrt{18}=\sqrt{9.2}=3\sqrt{2}$. Ergo $2\sqrt{2}:3\sqrt{2}=2:3$, hoc eſt, $\sqrt{8}:\sqrt{18}=2:3$. In caſu reliquo ſunt incommenſurabiles.

SCHOLION I.

324. *Iſtud quantitatum irrationalium genus* communicantium *nomine venire ſolet.*

COROLLARIUM II.

325. Per præſens adeo problema invenitur ratio rationalis irrationalium, ſi qua datur.

COROLLARIUM III.

326. Quia $\sqrt[m]{a^n x^m}=x\sqrt[m]{a^n}$ (§. 322.); quantitas ex parte rationalis, ex parte irrationalis, ad pure irrationalem reducitur, ſi quantitas

titas rationalis ad eam dignitatem evehitur, cujus gradum indicat exponens ſigno radicali præfixus, & dignitas per quantitatem ſub ſigno radicali multiplicatur. E. gr. $5\sqrt{2} = \sqrt{2.25} = \sqrt{50}$ & $5\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3.5^3} = \sqrt[3]{3.125} = \sqrt[3]{375}$.

SCHOLION.

327. *Quodſi quæſiveris, quomodo in reſolutione innoteſcat, utrum quantitas ſub ſigno radicali poſita per potentiam aliquam requiſitam ſit diviſibilis, nec ne, & quænam ſit iſta potentia; in diviſores reſolvenda eſt, inter quos locum obtineant neceſſe eſt omnes potentiæ a prima usque ad requiſitam, ſi cum numeris nobis res fuerit. E. gr. Quæritur an* $\sqrt[4]{368}$ *ſit diviſibilis per aliquam potentiam quarti gradus. Reſoluturus numerum* 368 *in ſuos diviſores, reperiet*

2	184
4	92
8	46
16	23,

tentando nempe diviſionem per numeros minores & quotos majores a latere ponendo. Invenies hic 2 *potentiam primi gradus,* 4 *potentiam ſecundi,* 8 *potentiam tertii &* 16 *potentiam quarti. Ergo* 16 *eſt diviſor quæſitus, conſequenter* $\sqrt[4]{368} = 2\sqrt[4]{23}$.

PRO-

PROBLEMA XI.

328. *Quantitates irrationales addere, aut unam ex altera ſubtrahere.*

RESOLUTIO.

Si quantitates irrationales fuerint communicantes, adeoque reductæ (§. 322.) fuerint commenſurabiles (§. 324.); quantitates rationales extra vinculum adduntur, & a ſe invicem ſubtrahuntur, ibique ſumma, hic differentia denuo præfigitur ſigno radicali. Reliqua omnia ſunt ut in additione & ſubtractione rationalium.

Ita reperietur $\sqrt{8} + \sqrt{18} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$ (§. 322.) $= 5\sqrt{2} = \sqrt{50}$ (§. 326.) & $\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3.8} + \sqrt[3]{3.27} = 2\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{3} = 5\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{375}$.

Similiter $\sqrt{18} - \sqrt{8} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$ & $\sqrt[3]{375} - \sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3} = 3\sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{24}$.

Contra $\sqrt{7}$ & $\sqrt{5}$ cum ſint incommenſurabiles (§. 323.); ſumma erit $\sqrt{7} + \sqrt{5}$ (§. 301.), & differentia $\sqrt{7} - \sqrt{5}$ (§. 304.),

Hinc & intelliguntur exempla in compoſitis, tum in additione:

$$4\sqrt{3}-5\sqrt{2}+7\sqrt{7}+8\sqrt{5}$$
$$\sqrt{3}+9\sqrt{2}+3\sqrt{7}-4\sqrt{5}$$
$$5\sqrt{3}+4\sqrt{2}+10\sqrt{7}+4\sqrt{5} \text{ sum:}$$

hoc est $\sqrt{3.25}+\sqrt{2.16}+\sqrt{7.100}+\sqrt{5.16}$
seu $\sqrt{75}+\sqrt{32}+\sqrt{700}+\sqrt{80}$

tum in subtractione:

$$5\sqrt{2}-7\sqrt{3}+8\sqrt{10}$$
$$3\sqrt{2}+5\sqrt{3}-9\sqrt{10}.$$
$$2\sqrt{2}-12\sqrt{3}+17\sqrt{10} \text{ different:}$$

hoc est $\sqrt{2.4}-\sqrt{3.144}+\sqrt{10.289}$
seu $\sqrt{8}-\sqrt{432}+\sqrt{2890}$

DEMONSTRATIO

Omnia manifesta sunt ex demonstratione probl. (§. 301. 304.).

PROBLEMA XII.

329. *Quantitates irrationales per irrationales multiplicare ac dividere.*

RESOLUTIO.

Multiplicentur aut dividantur quantitates sub signo radicali; ibi facto, hic quoto præfigatur signum idem radicale cum suo exponente. Quodsi radicales quantitates fuerint diversæ denominationis, ante omnia reducantur ad eandem (§. 321.).

E. gr. In multiplicatione $\sqrt{3}.\sqrt{5}=\sqrt{15}$ & $\sqrt{12}.\sqrt{3}=\sqrt{36}=6$. Item in compositis:

$\sqrt{3}$

$$\begin{array}{ll} \sqrt{3}+\sqrt{2} & \sqrt{2}+\sqrt{3} \\ \sqrt{3}-\sqrt{2} & \sqrt{2}+\sqrt{3} \\ \hline -\sqrt{6}-2 & +\sqrt{6}+3 \\ 3+\sqrt{6} & 2+\sqrt{6} \\ \hline 3-2=1 & 2\sqrt{6}+5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 7\sqrt{3}-5\sqrt{2} \\ 5\sqrt{8}+3\sqrt{6} \\ \hline +21\sqrt{18}-15\sqrt{12} \\ 35\sqrt{24}-100 \\ \hline 35\sqrt{24}+21\sqrt{18}-15\sqrt{12}-100 \\ \text{h. e. } 70\sqrt{6}+63\sqrt{2}-30\sqrt{3}-100 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \sqrt{8}+\sqrt{2}+\sqrt{32} \\ \sqrt{8}+\sqrt{2}+\sqrt{32} \\ \hline +16+8+32 \\ +4+2+8 \\ 8+4+16 \\ \hline 98 \end{array}$$

Similiter in divisione $\sqrt{8}:\sqrt{2}=\sqrt{4}=2$ & $\sqrt{12}:\sqrt{6}=\sqrt{2}$. Item in compositis:

$$\begin{array}{l} \sqrt{15}-\sqrt{6}+\sqrt{12}\,(\sqrt{5}-\sqrt{2}+2 \\ \sqrt{3})\,\sqrt{15} \\ \hline -\sqrt{6}+\sqrt{12} \\ -\sqrt{6} \\ \hline \sqrt{12}=2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} \\ \hline 0 \end{array}$$

Scholion.

330. Radices imaginariæ *dicuntur*, *si quantitas sub signo radicali fuerit negativa*, *veluti* $\sqrt{-2}$,

 cum

cum quadratum -2 *ſit quantitas impoſſibilis, propterea, quod omne quadratum ſit poſitivum* (§. 309. 171.) *Facile autem patet, additionem & ſubtractionem radicum imaginariarum eodem modo fieri debere ac realium. Id quod in Elementis Matheſeos univerſæ docetur.*

CAPUT III.

DE USU CALCULI LITTERALIS IN INVENIENDIS THEOREMATIS.

PROBLEMA XIII.

331. *Determinare ſummam termini primi & ultimi in progreſſione arithmetica.*

Sit terminus primus a, differentia terminorum ſive creſcentium, ſive decreſcentium d, erit (§. 244.)

$$a.\ a+d.\ a+2d.\ a+3d.\ a+4d.\ a+5d$$

$$\begin{array}{ccc} a+4d & & a+2d \\ \hline 2a+5d & & 2a+5d \end{array}$$

$$\begin{array}{c} a+5d \\ a \\ \hline 2a+5d \end{array}$$

Item

$$a.\ a+d.\ a+2d.\ a+3d.\ a+4d$$

$$\begin{array}{ccc} a+3d & 2 & a \\ \hline 2a+4d & 2a+4d & 2a+4d \end{array}$$

Theorema: In progressione arithmetica tam crescente, quam decrescente summa termini primi & ultimi æqualis est summæ duorum quorumlibet mediorum ab extremis æquidistantium aut medii duplo, si numerus terminorum impar.

E. gr. 3. 6. 9. 12. 15. 18. 21.
12 9 6 3

24 = 24 = 24 = 24

COROLLARIUM I.

332. Habetur ergo summa progressionis arithmeticæ, si summa termini primi & ultimi ducatur in dimidium terminorum numerum.

COROLLARIUM. II.

333. Quodsi adeo sit terminus primus a, differentia d, numerus terminorum n, erit ultimus $a + (n - 1) d$ (§. 244.), consequenter summa progressionis $\frac{1}{2} n (2a + (n - 1) d)$ (§. 332.) $= an + \frac{1}{2} (n^2 - n) d$. Ex datis itaque termino primo a, differentia d & numero terminorum n invenitur summa progressionis, si facto ex termino primo in numerum terminorum addatur factum ex differentia eorundem in semidifferentiam numeri terminorum a quadrato ejusdem. E. gr. Sit $a = 3$ $n = 7$, $d = 3$, erit summa $= 21 + \frac{49 - 7}{2} \cdot 3$ $= 21 + \frac{42}{2} \cdot 3 = 21 + 21 \cdot 3 = 21 + 63 = 84$.

 SCHO-

SCHOLION. I.

334 *Notent tyrones regulas ex ſymbolis eruturi, ab initio gradatim eſſe progrediendum, exprimendo nempe ſigilatim quodlibet ſymbolum per rem denotatam & quamlibet operationem ſignis repræſentatam per nomina convenientia E. gr. In* an *eſt* a *terminus primus &* n *numerus terminorum*, ex hypoth. *Sed* an *eſt factum ex* a *in* n (§. 286.). *Ergo pro* an *ſubſtituitur in regula factum ex termino primo in numerum terminorum. Porro* n^2 *eſt quadratum ipſius* n (§. 178.). *Sed* n *eſt numerus terminorum: ergo* n^2 *quadratum numeri terminorum. Signum.* — *indicat ſubtractionem* (§. 286.). *Quare* $n^2 - n$ *differentia numeri terminorum ab ejus quadrato &* $\frac{1}{2}(n^2-n)$ *ſemidifferentia iſta. Porro* d *eſt differentia terminorum* ex hypoth. *adeoque* $\frac{1}{2}(n^2-n)\,d$ *factum ex illa ſemidifferentia in differentiam terminorum. Denique ſignum* + *indicat facta hactenus explicata eſſe addenda. Hac quidem ſyllabizatione opus habent, qui ſine mora ſymbolicas expreſſiones quantitatum ſibi familiares reddere geſtiunt.*

COROLLARIUM III.

335. Sit $a=1$, $d=2$, hoc eſt, ſit ſeries numerorum imparium 1. 3. 5. 7 &c. erit ſumma $= n + n^2 - n$ (§. 333.) $= n^2$ (§. 299.) Patet adeo numeros quadratos prodire continua numerorum imparium additione, conſequenter differentias numerorum quadratorum eſſe numeros impares.

Co-

COROLLARIUM IV.

136. Sit $a = n = \frac{1}{2} d$, erit ſumma $= n^2 + n^3 - n^2$ (§. 333.) $= n^3$ (§. 299.) Quilibet adeo cubus reſolvitur in progreſſionem arithmeticam, cujus terminus primus, ſemidifferentia & numerus terminorum ſunt radici ejus æquales. Ita $8 = 2 + 6$, $27 = 3 + 9 + 15$, $64 = 4 + 12 + 20 + 28$.

SCHOLION II.

337. *Patet modus ex formulis algebracis eruendi theoremata ſpecialia, qui continetur ſub problemate logico de ſpecierum notionibus ex notione generis formandis*

DEFINITIO IV.

338. *Denominator* rationis eſt quotus ex diviſione termini majoris per minorem emergens.

COROLLARIUM I.

339. Major ergo prodit, minore per denominatorem multiplicato (§. 146.): minor vero habetur, majore per denominatorem diviſo (§. 144.). Unde ſi terminus minor a, denominator m; erit major $m\,a$; ſi terminus major a, minor erit $\frac{a}{m}$. Quare $a : m\,a$ exprimit rationem minoris inæqualitatis;

 a:

$a : \frac{a}{m}$ vero rationem majoris (§. 96.). Immo quoniam $\frac{a}{m} = a . \frac{1}{m}$ (§. 314.); si m explicetur per fractionem, cujus numerator unitas, denominator idem cum denominatore rationis, $a : m a$ rationem quamcunque designat.

COROLLARIUM II.

340. Quia in ratione majoris inæqualitatis antecedens major consequente (§. 96.); ejus denominator idem est cum exponente, (§. 98.)

COROLLARIUM III.

341. In ratione minoris inæqualitatis exponens rationis $\frac{a}{m a}$ (§. 98. 339.), hoc est $\frac{1}{m}$ (§. 159.). Æquatur ergo fractioni, cujus numerator unitas; denominator idem cum denominatore rationis.

PROBLEMA XIV.

342. *Determinare factum ex termino primo in ultimum progressionis geometricæ.*

Sit

Sit terminus primus a, denominator m; erit progressio (§. 243. 339.).

$$a.\ ma.\ m^2a.\ m^3a.\ m^4a.\ m^5a,\ m^6a.$$

$$\frac{m^5a}{} \quad \frac{m^3a}{} \frac{m^2a}{} \quad \frac{a}{}$$

$$m^6a^2 = m^6a^2 = m^6a^2 = m^6a^2$$

Theorema. In progressione geometrica factum extremorum æquatur facto mediorum ab extremis æquidistantium, itemque medii quadrato, si numerus terminorum impar.

E. gr. 3. 6. 12. 24. 48. 96

$$\frac{12}{} \quad \frac{6}{} \quad \frac{3}{}$$

$$238 = 288 = 288$$

PROBLEMA XV.

343. *Determinare quotum ex divisione differentiæ terminorum primi ac ultimi per denominatorem unitate mulctatum emergentem.*

Sit terminus primus a, denominator m, numerus terminorum n; erit terminus ultimus $m^{n-1}a$, differentia primi & ultimi $m^{n-1}a - a$. Hæc si dividatur per $m - 1$, erit quotus $m^{n-2}a + m^{n-3}a + m^{n-4}a + m^{n-5}a + m^{n-6}a + m^{n-7}a$ &c.

$$\begin{array}{l} \quad m^{n-1}a-a \\ m-1)m^{n-1}a-m^{n-2}a \\ \overline{\quad +m^{n-2}\;a-a} \\ \quad m^{n-2}a-m^{n-3}a \\ \hline \quad +m^{n-3}\;a-a \\ \quad m^{n-3}a-m^{n-4}a \\ \hline \quad +m^{n-4}\;a-a \\ \quad m^{n-4}a-m^{n-5}a \\ \hline \quad +m^{n-5}\;a-a \\ \quad m^{n-5}a-m^{n-6}a \\ \hline \quad +m^{n-6}\;a-a \\ \qquad \&c. \end{array} \left\{ \begin{array}{l} m^{n-2}a+m^{n-3}a \\ +m^{n-4}a+ \\ m^{n-5}a+m^{n-6}a \\ +m^{n-7}a\&c. \end{array} \right.$$

Quodsi n determinetur, e. gr. per 7, erit $n-7=o$, consequenter $m^{n-7}a=m^o a=a$, adeoque divisio terminatur. Unde patet.

Theorema I. Si Differentia termini primi & ultimi progressionis geometricæ dividatur per denominatorem unitate mulctatum, quotus est summa omnium terminorum excepto maximo.

Et cum sit $m-1:1=m^{n-1}a-a:m^{n-2}a+m^{n-3}a$ &c. $+a$ (§. 123. 119.); patet porro

Theorema II. In progressione geometrica est ut denominator unitate mulctatus ad unitatem,

ita

ita differentia termini maximi & minimi ad ſummam omnium terminorum excepto maximo.

COROLLARIUM. I.

344. Quodſi ergo quoto ex diviſione differentiæ termini maximi & minimi per denominatorem unitate mulctatum emergenti maximus addatur; ſumma totius progreſſionis habetur.

COROLLARIUM II.

345. Sit adeo terminus primus a, denominator m, numerus terminorum n, erit terminus ultimus ſeu maximus $m^{n-1}a$, adeoque ſumma $m^{n-1}a + (m^{n-1}a - a) : (m-1) = m^n a - m^{n-1}a + m^{n-1}a - a) : (m-1)$ (§. 162.) $= (m^n a - a : (m-1)$ (§. 299.), conſequenter ſi eadem ſumma dicatur $ſ$, $m-1 : m^n - 1 = a : ſ$, (§. 215.). Eſt adeo terminus primus (ſeu minimus) progreſſionis ad ejus ſummam ut denominator unitate mulctatus ad ejus dignitatem, cujus exponens numero terminorum æqualis, unitate itidem mulctatam. Sit e. gr. $m=2$, $a=1$, $n=8$, erit ſumma $(256-1) : 1 = 255$.

COROLLARIUM. III.

346. Quoniam ſi terminus primus a denominator m; terminus ultimus $m^{n-1}a$, ſumma $(m^n a - a) : (m-1)$ (§. 345.): erit differentia inter ter-

terminum ultimum & ſummam $(m^{n-1}a-a)$: $(m-1)$ & differentia inter primum & ſummam

$$mam\frac{m^n a-a}{m-1}-a=\frac{m^n a-a-ma+a}{m-1}$$

(§. 162.) $=\frac{m^n a-ma}{m-1}$ Eſt ergo

differentia prior ad poſteriorem ut $m^{n-1}a-a)$: $(m-1)$ ad $(m^n a-ma)$: $(m-1)$, hoc eſt, ut $m^{n-1}a-a$ ad $m^n a-ma$ (§. 127.), hoc eſt, ut 1 ad m (§. 130.), ſeu ut unitas ad denominatorem.

COROLLARIUM IV.

347. Quare ſi differentia inter terminum primum & ſummam dividatur per differentiam inter ſummam & terminum ultimum; quotus eſt denominator (§. 48.)

PROBLEMA XVI.

348. *Inveſtigare rationum ſymptomata.*

Non alia re opus eſt, quam ut termini analytice exprimantur (§. 339.) & tentatis quotlibet mutationibus exploretur, utrum duarum rationum exponentes ſint æquales, nec ne (§. 108.). Sint itaque duæ quantitates a & ma; erit.

I. $\frac{a}{c} : \frac{ma}{c}$ II $\frac{a}{c} : \frac{ma}{c}$

$ac : mac = a : ma$ $\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = a : ma$

III. $a : ma$
$b : mb$

$a - b : ma - mb = a : ma = b : mb$

IV. $a : ma$
$b : mb$

$a + b : ma + mb = a : ma = b : mb.$

Sit porro

$a : ma = b : mb$

erit alternatim $a : b = ma : mb$
inverſe $ma : a = mb : b$
converſim $a + ma : a = b + mb : b$
compoſite $a + ma : ma = b + mb : mb$
Diviſim $ma - a : a = mb - b : b$
$ma - a : ma = mb - b : mb$

Item: $a^n : m^n a^n = b^n : m^n b^n$
$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{ma} = \sqrt[n]{b} : \sqrt[n]{mb}$

$a : ma$

$$a : mac = b : mbc$$

$$a : \frac{ma}{c} = b : \frac{mb}{c}$$

$$ac : ma = bc : mb$$

$$\frac{a}{c} : ma = \frac{b}{c} : mb$$

$$ac : mac = b : mb$$

$$\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = b : mb$$

$$ac : mac = bd : mbd$$

$$\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = \frac{b}{d} : \frac{mb}{d}$$

$$ac : mad = bc : mbd$$

$$\frac{a}{c} : \frac{ma}{d} = \frac{b}{c} : \frac{mb}{d}$$

Sit ordinate $a : ma = b : mb$
& $ma : mna = mb : mnb$
erit ex æquo $a : mna = b : mnb$
Sit perturbate $a : ma = b : mb$
& $ma : mna = \frac{b}{n} : b$

erit ex æquo $a : mna = \frac{b}{n} : mb$

Ipſæ nimirum expreſſiones, ſi quoti reducantur per regulas fractionum, ratio-

tionum similitudinem in omnibus loquuntur. E. gr. $ac : mac = 1 : m$ & $b : mb = 1 : m$. En utrobique exponentem eundem $1 : m$!

CAPUT IV.
DE ALGEBRA AD PROBLEMATA ARITHMETICA TAM DETERMINATA QUAM INDETERMINATA APPLICATA.

Definitio V.

349. *Algebra* est methodus resolvendi problemata per æquationes.

Definitio VI.

350. *Æquatio* est expressio ejusdem quantitatis per duos valores diversos, sed æquales, e. gr. $2 \cdot 3 = 4 + 2$.

De-

DEFINITIO VII.

351. *Radix æquationis* est valor quantitatis incognitæ, quæ æquationem ingreditur. E. gr. Si fuerit $a^2+b^2=x^2$; radix erit $\sqrt{(a^2+b^2)}$.

DEFINITIO VIII.

352. Si valor ipsius x fuerit positivus, e. gr. $x=3$; *Radix* dicitur *vera*.

DEFINITIO IX.

353. Si valor ipsius x fuerit negativus, e. gr. $x=-5$, *Radix* dicitur *falsa*.

DEFINITIO X.

354. Si valor ipsius x fuerit *radix* quantitatis negativæ, e. gr. $\sqrt{-5}$, *imaginaria* appellatur (§.330.).

DEFINITIO XI.

355. *Æquatio* dicitur simplex, si quantitas incognita fuerit unius dimensionis, e. gr. si $x=(a+b):2$.

DEFINITIO XII.

356. *Æquatio* dicitur *quadratica*, si quantitas incognita ad duas dimensiones assurgit, ut $x^2=a^2+b^2$: *cubica*, si ad tres, ut $x^3=a^3-b^3$ &c,

PRO-

PROBLEMA XVII.

357. *Problema datum Algebraice resolvere.*

RESOLUTIO.

1. Quantitates datæ a quæsitis distinguantur & datæ primis, quæsitæ ultimis alphabeti litteris denominentur (§. 282.)
2. Quærantur tot æquationes, quot quantitates incognitæ occurrunt: quod si fieri nequeat, id indicio est, *problema* non esse *determinatum*, sed unam vel plures quæsitarum pro arbitrio assumi posse. Inveniuntur autem æquationes, nisi in ipso problemate contineantur, per theoremata de æqualitate quantitatum agentia.
3. Quoniam in æquatione quantitates incognitæ cognitis sunt permixtæ; ea reducenda est, ita ut ex una parte compareat quantitas incognita tantum una, ex altera vero meræ cognitæ deprehendantur. Instituitur autem hæc reductio, si quantitates subductæ addantur, additæ subtrahantur, multiplicatæ dividantur, divisæ multiplicentur, e potentiis radices extrahantur, radices ad potentias evehantur, ut perpetua æqualitas conservetur (§. 66. 69. 71. 72. 179. 180.).

PROBLEMA XVIII.

358. *Ex æquatione quadratica radicem extrahere.*

RESOLUTIO.

I. Si æquatio fuerit pura, ut $x^2 = ab$; evidens eſt eſſe $x = \sqrt{ab}$.

II. Si æquatio fuerit affecta, ut $x^2 \mp ax = \mp b^2$; tum x aſſumatur pro una parte radicis, erit a quantitas cognita ſecundi termini duplum partis alterius (§. 183.), adeoque $\frac{1}{2}a$ pars altera. Complebitur adeo quadratum, ſi addatur $\frac{1}{4}a^2$ (§. *cit.*): quo facto, radix extrahi poteſt, ut hic factum eſſe apparet:

Caſus I.

$$x^2 + ax = b^2$$
$$\tfrac{1}{4}aa \quad \tfrac{1}{4}aa \text{ add.}$$
$$x^2 + ax + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + b^2$$
$$x + \tfrac{1}{2}a = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + b^2)}$$
$$x = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + b^2)} - \tfrac{1}{2}a$$

Casus 2.

$$x^2 - ax = b^2$$
$$x^2 - ax + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + b^2$$
$$x - \tfrac{1}{2}a = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + b^2)}$$
$$\tfrac{1}{2}a - x =$$
$$x = \tfrac{1}{2}a + \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + b^2)}$$
$$\text{vel } x = \tfrac{1}{2}a - \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + b^2)}$$

Quoniam $\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2} = \tfrac{1}{2}a$, adeoque $\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + b^2)} > \tfrac{1}{2}a$, erit $\tfrac{1}{2}a - \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + b^2)}$ valor ipsius x negativus, consequenter radix falsa (§. 353.), atque adeo solus valor $\tfrac{1}{2}a + \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + b^2)}$ est radix vera (§. 352.).

Casus 3.

$$x^2 - ax = -b^2$$
$$\tfrac{1}{4}a^2 \quad \tfrac{1}{4}a^2 \text{ add.}$$
$$x^2 - ax + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - b^2$$
$$x - \tfrac{1}{2}a = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b^2)}$$
$$\& \ \tfrac{1}{2}a - x$$
$$x = \tfrac{1}{2}a + \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b^2)}$$
$$\& \ x = \tfrac{1}{2}a - \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b^2)}$$

Quoniam $\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2} = \tfrac{1}{2}a$, adeoque $\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b^2)} < \tfrac{1}{2}a$, erit $\tfrac{1}{2}a - \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b^2)}$ valor ipsius x positivus, consequenter radix vera (§. 352.). Habet adeo in præsente casu æquatio duas radices veras: cujus rei ratio paulo post ex exemplis patebit.

Ceterum ex multiplicatione patet, esse $(\frac{1}{2}\, a - x)^2$ perinde ac $(x - \frac{1}{2}\, a)^2 = x^2 - ax + \frac{1}{4}\, a^2$.

PROBLEMA XIX.

359. *Invenire numerum, cujus pars dimidia cum tertia & quarta numerum integrum unitate superat.*

Si numerus quæsitus x, erit per conditionem problematis

$$\tfrac{1}{2}\, x + \tfrac{1}{3}\, x + \tfrac{1}{4}\, x = x + 1$$

hoc est $(12x + 8x + 6x) : 24 = x + 1$

seu $\frac{26}{24}\, x = x + 1$

$$\underline{\qquad\qquad\qquad 24.\ \text{mult.}}$$

$$26\, x = 24x + 24$$

$$\underline{24\, x \quad 24x \qquad \text{Subtr.}}$$

$$2\, x = 24$$

$$\underline{\qquad\qquad 2\ \text{div.}}$$

$$x = 12$$

Examen $\frac{1}{2}\, x + \frac{1}{3} x + \frac{1}{4}\, x = 6 + 4 + 3 = 13 = 12 + 1.$

PROBLEMA. XX

360. *Datis summa & differentia duarum quantitatum invenire quantitates.*

Sit summa $= a$, differentia $= b$, Quantitas minor $= x$, erit major $= x + b$ (§. 64.) Quare.

$$x + b + x = a$$

$$\underline{\qquad\qquad b\ \text{Subtr.}}$$

$$2x = a - b$$

$$\underline{\qquad\qquad 2\ \text{div.}}$$

$$x = \tfrac{1}{2}\, a - \tfrac{1}{2}\, b$$

Ergo

Ergo quantitas major $= b + x = b + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$.

Theorema; Si a semisumma duarum quantitatum subtrahatur semidifferentia relinquitur quantitas minor si vero illi hæc addatur, prodit major.

PROBLEMA XXI.

361. *Datis summa duarum quantitatum & earundem facto, invenire numeros.*

Sit summa $= a$ Semidiffer. $= x$ Fact. $= b$ erit Quant. maj $= \frac{1}{2}a + x$ min. $\frac{1}{2}a - x$ (§. 284. 360).
Ergo per conditionem probl. (§. 310.).

$$\frac{1}{4}aa - xx = b$$
$$xx \quad xx \text{ add.}$$
$$\frac{1}{4}aa = b + xx$$
$$b \quad b \text{ Subtr.}$$
$$\frac{1}{4}aa - b = xx$$
$$\sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)} = x$$

Regula 1. A quadrato semisummæ duarum quantitatum subtrahatur factum earundem. 2. Ex residuo extrahatur radix, quæ erit semidifferentia earundem. Sit e. gr. $a = 14$, $b = 48$: erit $\sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)} = \sqrt{(49 - 48)} = 1$. Adeoque $\frac{1}{2}a + x = 7 + 1 = 8$. $\frac{1}{2}a - x = 7 - 1 = 6$. Sunt adeo numeri quæsiti 8 & 6. Nam $8.6 = 48$ & $8 + 6 = 14$.

PROBLEMA XXII.

362. *Data summa dignitatum similium duarum quantitatum & differentia earundem invenire quantitatem utramque.*

Sit summa $= a$ Quant. maj. $= y$
differentia $= b$ min. $= x$
erit per conditionem probl.

$$x^m + y^m = a \qquad y^m - x^m = b$$
$$\underline{x^m \qquad x^m} \qquad \underline{x^m \qquad x^m}$$
$$y^m = a - x^m \qquad y^m = b + x^m$$

Quare (§. 65.)

$$a - x^m = b + x^m$$
$$\underline{x^m \qquad x^m}$$
$$a = b + 2x^m$$
$$\underline{b \qquad b}$$
$$a - b = 2x^m$$
$$\underline{\qquad\qquad} (2$$
$$\underline{(a-b):2 = x^m}$$

$$\sqrt[m]{(\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b)} = x$$

Sit $m=2$, $a=97$, $b=65$: erit $x = \sqrt{(48\tfrac{1}{2} - 32\tfrac{1}{2})} = \sqrt{16} = 4$ & hinc $y = \sqrt{(b + x^2)} = \sqrt{(65 + 16)} = \sqrt{81} = 9$.
Examen: $x^2 + y^2 = 16 + 81 = 97$ & $y^2 - x^2 = 81 - 16 = 65$

Æquatio antepenultima resolvitur in hanc analogiam,
$a-b : x^m = 2 : 1$ (§. 212.), quæ sequens suppeditat.

THEO-

Theorema: Excessus summæ duarum dignitatum similium supra differentiam earundem est ad dignitatem minorem in ratione dupla.

PROBLEMA XXIII.

363. *Dato itinere diurno viatoris alicujus una cum itinere diurno alterius ipsum dato tempore sequentis, invenire tempus, quo illum hic assequetur.*

Sit iter diurnum primi $= a$
secundi $= b$
tempus datum $= c$
tempus quæs. $= x$

erit iter intra tempus datum a primo confectum $= ac$, quod vero idem intra quæsitum emensus est $= ax$: iter posterioris intra tempus quæsitum reperietur $= bx$ (§. 215.). Quare per conditionem problematis

$$ac + ax = bx$$
$$ax \quad ax \text{ subtr. quia } bx > ax$$

$$ac = bx - ax$$
$$-b-a$$

$$ac : (b-a) = x$$

Sit $a = 6$, $b = 8$, $c = 4$: erit $x = 24 : 2 = 12$.

Examen. Quoniam primus itineri impendit 16, alter vero 12 dies, antequam conveniunt, & iter diurnum primi sit 6, se-

ſecundi 8; via primi eſt 6. 16=96, ſecundi 8. 12=96.

Æquatio penultima in hanc analogiam reſolvitur (§. 212.).

$$b-a : a = c : x$$

quæ ſequens ſuppeditat.

Theorema: Si quidam viator alterum inſequitur, tempore aliquo elapſo, differentia viarum, quas eodem tempore uterque emetitur, eſt ad viam primi, quem alter inſequitur, ut tempus ab itinere primi usque ad initium itineris ſecundi elapſum ad tempus, quo alter ipſum aſſequitur.

SCHOLION.

364. *Facile apparet, cum viatoris notio problematis reſolutionem non ingrediatur, problema univerſalius de mobilibus quibuscunque concipi poſſe.*

PROBLEMA XXIV.

365. *Dato itinere diurno alicujus viatoris una cum tempore ab initio itineris elapſo, invenire iter diurnum ab alio viatore conficiendum, ut in dato tempore illum aſſequatur.*

Sit iter diurnum primi $= a$
tempus elapſum $= b$
tempus datum $= c$
iter diurnum alterius $= x$

Erit.

Erit per conditionem problematis ut in probl. præced.

$$\frac{ab + ac = cx.}{(ab+ac):c = x}$$

Sit e. gr. $a=6$, $b=4$, $c=12$; erit $x = (24+72): 12 = 96: 12 = 8$.

Æquatio penultima in hanc reſolvitur analogiam (§. 212.)

$$c: b+c = a: x$$

quæ ſequens ſuppeditat

Theorema: Si quidam viator alterum inſequitur tempore aliquo elapſo, erit tempus, intra quod ipſum aſſequitur, ad tempus ab initio itineris hujus elapſum, ut iter diurnum primi ad iter diurnum ſecundi.

PROBLEMA XXV.

366. *Dato intervallo locorum, ex quibus eodem tempore duo viatores egrediuntur, una cum itinere diurno uniuscujuslibet, invenire tempus, quo ſibi mutuo occurrent.*

Sit intervallum locorum $= a$
iter diurnum primi $= b$
ſecundi $= c$
tempus occurſus $= x$

erit via a primo intra tempus x confecta $= bx$, via, quam alter eodem tempore emetitur $= cx$ (§. 215). Quare cum

 am-

ambo junctim emensi sint totum intervallum locorum, unde egrediebantur; habebimus

$$bx + cx = a$$

$$\overline{} b + c$$

$$x = a : (b + c)$$

Sit $a = 120$, $b = 6$, $c = 4$; erit $x = 120 : (6 + 4) = 120 : 10 = 12$. Duodecimo igitur die sibi mutuo occurrent.

PROBLEMA XXVI.

367. *Data summa duarum quantitatum & differentia quadratorum, invenire quantitates.*

Sit summa $= a$
differentia Quadr. $= b$
Semidiff. Quant. $= y$
erit Quant. maj. $= \frac{1}{2} a + y$.
minor $= \frac{1}{2} a - y$ (§. 284. 360.).

Quare

Quadratum maj. $\frac{1}{4} a^2 + ay + y^2$
min. $\frac{1}{4} a^2 - ay + y^2$

Differ. (§. 304.) $2\, ay = b$ per condit.
$2\, a$ ———————— probl.

$$y = b : 2a$$

Sit $b = 40$, $a = 10$; erit $y = 40 : 20 = 2$. Hinc $\frac{1}{2}\, a + y = 5 + 2 = 7$ & $\frac{1}{2}\, a - y = 5 - 2 = 3$.

Examen: $49 - 9 = 40$ & $7 + 3 = 10$.

PRO-

PROBLEMA XXVII.

368. *Data summa duarum quantitatum una cum summa quadratorum, invenire quantitatem utramque.*

Sit summa $= a$
Summa Quadr. $= b$
Semidiff. Quant. $= y$
erit major $= \frac{1}{2}a + y$ }
minor $= \frac{1}{2}a - y$ } (§. 284. 360.).

Quare

Quadrat. maj. $\frac{1}{4}a^2 + ay + y^2$
min. $\frac{1}{4}a^2 - ay + y^2$

Summa $\frac{1}{2}a^2 + 2y^2 = b$
$\frac{1}{2}a^2$ $\frac{1}{2}a^2$ Subtr.

$2y^2 = b - \frac{1}{2}a^2$
2 div.

$y^2 = \frac{1}{2}b - \frac{1}{4}a^2$

$y = \sqrt{(\frac{1}{2}b - \frac{1}{4}a^2)}$

Sit $a = 10$, $b = 58$: erit $y = \sqrt{(29 - 25)} = \sqrt{4} = 2$. Hinc $\frac{1}{2}a + y = 5 + 2 = 7$ & $\frac{1}{2}a - y = 5 - 2 = 3$.

Examen: $7 + 3 = 10$ & $49 + 9 = 58$.

PROBLEMA XXVIII.

369. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut factum ex unoquoque in radicem quadratam alterius sit æquale numero dato.*

Sit

Sit factum unum $= a$
alterum $= b$
numerus unus $= x$
alter $= y$

erit per conditionem problematis

$$x\sqrt{y} = a \qquad y\sqrt{x} = b$$
$$x^2 y = a^2 \qquad y^2 x = b^2;$$
$$\text{———}\, y \qquad \text{———}\, y^2$$
$$x^2 = a^2 : y \qquad x = b^2 : y^2$$
$$x^2 = b^4 : y^4$$
$$a^2 : y = b^4 : y^4$$
$$\text{———}\, y^4 \text{ mult.}$$
$$a^2 y^3 = b^4$$
$$\text{———}\, a^2$$
$$y^3 = b^4 : a^2$$
$$y = \sqrt[3]{(b^4 : a^2)}$$

Sit $a = 18$, $b = 12$; erit $y = \sqrt[3]{}$ $(20736 : 324) = \sqrt[3]{64} = 4$. Ergo $x = b^2 : y^2 = 144 : 16 = 9$.

Examen. $9\sqrt{4} = 2.9 = 18$ & $4\sqrt{9} = 4.3 = 12$.

PROBLEMA XXIX.

370. *Dato pretio unius menſuræ vini, invenire quantitatem aquæ commiſcendæ, ut una menſura dato alio pretio minore vendi queat.*

Sit

Sit pretium majus $= a$
minus $= b$
quantitas aquæ $= x$

Cum aquæ pretium nullum ſit; erit
$1 + x : 1 = a : b$ conſequenter

$b + bx = a$ (§. 210.)

$bx = a - b$.

$x = (a - b) : b = a : b - 1$.

Sit $a = 16$, $b = 10$; erit $x = 1\frac{6}{10} - 1 = \frac{6}{10}$
$= \frac{3}{5}$.

Theorema: Si vino pretioſiori aqua commiſcenda, ut viliori pretio conſtet; quantitas aquæ commiſcendæ eſt ad quantitatem vini, ut differentia pretiorum ad pretium minus.

Nempe vi æquationis penultimæ $x : 1 = a - b : b$

Examen. Etenim ſi integra menſura veneat 10 groſſis, tres ipſius quintæ veneunt 6 groſſis (§. 215.), quos ſi addas pretio unius menſuræ, quod eſt 10 groſſorum: prodibunt 16 groſſi pretium unius menſuræ vini generoſioris.

PROBLEMA XXX.

371. *Dato pretio vini generoſi & pretio vilioris, determinare quantitatem vini vilioris generoſo commiſcendi, ut dato aliquo pretio medio venire queat.*

Sit

Sit pretium unius menſuræ vini
generoſi $= a$
vilioris $= b$
medium $= c$
quantitas unius menſuræ $= 1$.
quantitas vilioris vini
commiſcendi $= x$;
erit pretium ejus $= bx$.
quantitas generoſi
commiſcendi $= 1 - x$;
erit ejus pretium $= a - ax$.
Quare per conditionem
problematis

$$a - ax + bx = c$$
$$ax \quad ax \text{ add. ob } ax > bx$$
$$\overline{a + bx = c + ax}$$
$$bx \quad bx$$
$$\overline{a = c + ax - bx}$$
$$c \quad c$$
$$\overline{a - c = ax - bx}$$
$$\overline{} - a - b$$
$$(a - c) : (a - b) = x$$

Sit $a = 16$, $b = 10$, $c = 12$; erit $x = (16 - 12) : (16 - 10) = 4 : 6 = \frac{2}{3}$.

Examen. Pretium $\frac{2}{3}$ vilioris $= 6\frac{2}{3}$, generoſi $= 5\frac{1}{3}$, adeoque menſuræ mixti $= 6\frac{2}{3} + 5\frac{1}{3} = 12$.

PROBLEMA XXXI.

372. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut factum, ſumma & differentia quadratorum ſint inter ſe æqualia.*

Sit

Sit numerus major $= x$, minor $= y$; erit per conditionem problematis

$$x^2 - y^2 = xy \qquad x + y = xy$$

$$\underline{\quad y \quad y \quad}$$

$$x = xy - y$$

$$\underline{\qquad\qquad} x - 1$$

$$x : (x - 1) = y$$

Quodsi valor ipsius y jam inventus substituatur in æquatione sinisteriore habebimus

$$x^2 - \frac{x^2}{x^2 - 2x + 1} = \frac{x^2}{x - 1}$$

$$\underline{\qquad\qquad\qquad} x^2 - 2x + 1$$

$$x^4 - 2x^3 + x^2 - x^2 = x^3 - x^2$$

$$x^4 - 2x^3 = x^3 - x^2$$

$$x^3 \quad x^3 \quad \text{subtr.}$$

$$x^4 - 3x^3 = -x^2$$

$$\underline{\qquad\qquad} x^2 \text{ div.}$$

$$x^2 - 3x = -1$$

$$\tfrac{9}{4} \qquad \tfrac{9}{4} \text{ (§. 358.)}$$

$$x^2 - 3x + \tfrac{9}{4} = \tfrac{9}{4} - 1 = \tfrac{5}{4}$$

$$x - \tfrac{3}{2} = \sqrt{\tfrac{5}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{5}$$

$$\tfrac{3}{2} - x =$$

$$x = \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5}$$

Est vero $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ radix vera; sed $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ non est numerus minor y, quia, si numerus minor diceretur y, ad aliam æquationem deveniretur, quemad-

modum

modum apparet, si valore ipsius x per æquationem $xy - x = y$ reperto & in æquatione $x^2 + y^2 = xy$ substituto, reductio legitime instituatur. Tunc enim reperitur $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$, ubi $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ est radix falsa, quia $\frac{1}{2}\sqrt{5} > \frac{1}{2}$.

Examen. Est enim $x + y = 2 + \sqrt{5}$, $xy = 2 + \sqrt{5}$ & $x^2 - y^2 = 2 + \sqrt{5}$.

PROBLEMA XXXII.

373. *Datis in progressione arithmetica termino primo & ultimo atque differentia terminorum, invenire numerum terminorum & summam progressionis.*

Sit terminus primus $= a$
ultimus $= b$
differentia $= d$
numerus terminorum $= x$
Summa $= y$

erit (§. 244. 332.)

$$b = a + dx - d \qquad y = \tfrac{1}{2}(b + a)x$$

$$\begin{array}{l} b = a + dx - d \\ \underline{d \qquad\quad d} \\ b + d = a + dx \\ \underline{\quad a \quad a} \\ b + d - a = dx \\ (b + d - a) : d = x \end{array}$$

Quodsi hic valor in æquatione dextra substituatur, habebimus

$y = \frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{2}(b+a)(b+d-a) : d = (b^2 + bd - ab + ab + ad - a^2) : 2d = (b^2 + bd + ad - a^2) : 2d = \frac{1}{2}(b+a) + (b^2 - a^2) : 2d.$

Sit $a=2$, $b=17$, $d=3$; erit $x = (17 + 3 - 2) : 3 = 18 : 3 = 6$ & $y = \frac{1}{2}(17+2) + (289-4) : 6 = \frac{19}{2} + \frac{285}{6} = 9\frac{1}{2} + 47\frac{1}{2} = 57$.

PROBLEMA XXXIII.

374. *Datis termino primo, differentia terminorum & summa progressionis arithmeticæ, invenire numerum terminorum & terminum ultimum.*

Sit terminus primus $= a$
differentia $= d$
Summa $= c$
ultimus $= y$
terminorum numerus $= x$

erit (§. 244. 332.).

$$\frac{1}{2}x(a+y) = c \qquad a + dx - d = y$$

$$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad 2}$$

$$ax + xy = 2c$$

$$\underline{ax \qquad\qquad ax} \text{ subtr.}$$

$$\underline{xy = 2c - ax}$$

$$y = (2c - ax) : x$$

Ergo (§. 65.)

$$(2c - ax) : x = a + dx - d.$$

$$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} x$$

$$2c - ax = ax + dx^2 - dx$$

$$\underline{\quad ax \qquad ax \quad}$$

$$2c = dx^2 + 2ax - dx$$

$$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} d$$

$$\frac{2c}{d} = x^2 + \frac{2a - d}{d} x$$

hoc est, si fiat $(2a - d) : d = m$

$$2c : d = x^2 + mx$$

$$\underline{\tfrac{1}{4} m^2 \qquad \tfrac{1}{4} m^2}$$

$$\tfrac{1}{4} m^2 + 2c : d = x^2 + mx + \tfrac{1}{4} m^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4} m^2 + 2c : d)} = x + \tfrac{1}{2} m$$

$$\underline{\tfrac{1}{2} m \qquad\qquad \tfrac{1}{2} m}$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4} m^2 + 2c : d)} - \tfrac{1}{2} m = x$$

Sit $a = 2$, $d = 3$, $c = 57$; erit $m = (4 - 3) : 3 = \frac{1}{3}$, consequenter $x = \sqrt{(\frac{1}{36} + \frac{114}{3})} - \frac{1}{6} = \sqrt{\frac{1369}{36}} - \frac{1}{6} = \frac{37}{6} - \frac{1}{6} = \frac{36}{6} = 6$ & $y = 2 + 18 - 3 = 2 + 15 = 17$.

PROBLEMA XXXIV.

375. *Datis termino primo & ultimo una cum summa progressionis arithmeticæ invenire numerum & differentiam terminorum.*

Sit

Sit terminus primus $=a$
ultimus $=b$
Summa $=c$
differentia $=y$
numerus terminorum $=x$;
erit (§. 244. 332.)

$$\tfrac{1}{2}x(a+b)=c \qquad a+xy-y=b$$

$$x(a+b)=2c \qquad xy-y=b-a$$

$$x=2c:(a+b) \qquad y=\frac{b-a}{x-1}$$

$$x-1=\frac{2c}{a+b}-1 \qquad =\frac{(b+a)(b-a)}{2c-a-b}$$

$$=\frac{2c-a-b}{a+b}$$

Sit $a=2$, $b=17$, $c=57$; erit $x=114:19=6$ & $y=(19.\ 15):(114-19)=285:95=3$.

Cum sit $y=\frac{(b+a)(b-a)}{2c-a-b}$,

æquatio hæc resolvitur in analogiam
$2c-a-b:b-a=b+a:y$

quæ sequens suppeditat

Theorema. In progreſſione arithmetica eſt ut differentia ſummæ ex termino primo & ultimo a duplo ſummæ progreſſionis ad differentiam termini primi ab ultimo, ita ſumma termini primi & ultimi ad differentiam progreſſionalem.

PROBLEMA XXXV.

376. *Datis differentia & numero terminorum una cum ſumma progreſſionis arithmeticæ, invenire terminum primum & ultimum.*

Sit numerus terminorum $= n$
differentia $= d$
Summa $= c$
term. I $= x$
ultimus $= y$;

erit (§. 244. 332.)

$$\tfrac{1}{2} nx + \tfrac{1}{2} ny = c \qquad x + nd - d = y$$

h. e. $nx + \tfrac{1}{2} n^2 d - \tfrac{1}{2} nd = c$

$$\overline{} - \tfrac{1}{2} n$$

$$2x + nd - d = 2c : n$$

$$2x = 2c : n - nd + d$$

$$\overline{} - 2$$

$$x = c : n - \tfrac{1}{2} nd + \tfrac{1}{2} d$$

Sit $n = 6$, $d = 3$, $c = 57$; erit $x = 9\tfrac{1}{2} + 1\tfrac{1}{2} - 9 = 2$ & $y = 2 + 18 - 3 = 17$.

PRO-

PROBLEMA XXXVI.

377. *Datis differentia terminorum, termino ultimo & summa progressionis arithmeticæ, invenire terminum primum & numerum terminorum.*

Sit terminus ultimus $= b$
terminorum differ. $= d$
Summa $= c$
terminus primus $= x$
numerus termin. $= y$;

erit (§. 244. 332.)

$$\tfrac{1}{2}y(x+b) = c \qquad b = x + dy - d$$

$$y(b+x) = 2c \qquad b + d - x = dy$$

$$y = 2c:(b+x) \qquad (b+d-x):d = y$$

Quamobrem (§. 65.)

$$2c:(b+x) = (b+d-x):d$$

$$2cd:(b+x) = b+d-x$$

$$2cd = b^2 + bd - bx + bx + dx - x^2$$

$$x^2 - dx = b^2 + bd - 2cd$$

$$\tfrac{1}{4}d^2 \qquad \tfrac{1}{4}d^2 \text{ (§. 358.)}$$

$$x^2 - dx + \tfrac{1}{4}d^2 = \tfrac{1}{4}d^2 + b^2 + bd - 2cd$$

$$x - \tfrac{1}{2}d = \sqrt{(\tfrac{1}{4}d^2 + b^2 + bd - 2cd)}$$

$$\tfrac{1}{2}d - x =$$

$$x = \tfrac{1}{2}d \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}d^2 + b^2 + bd - 2cd)}$$

Quodsi $\frac{1}{2}d > x$; erit $\frac{1}{2}d - x$ quantitas positiva, adeoque $x = \frac{1}{2}d - \sqrt{}(\frac{1}{4}d^2 + b^2 + bd - 2cd)$: Si vero $\frac{1}{2}d < x$ quantitas $\frac{1}{2}d - x$ æquivalet privativo; sed $x - \frac{1}{2}d =$ positivo, adeoque $x = \frac{1}{2}d + \sqrt{}(\frac{1}{4}d^2 + b^2 + bd - 2cd)$.

Sit $b = 17$, $d = 3$, $c = 57$; erit $x = \frac{3}{2} + \sqrt{}(\frac{9}{4} + 289 + 51 - 342) = \frac{3}{2} + \sqrt{}(2\frac{1}{4} - 2) = \frac{3}{2} + \sqrt{}\frac{1}{4} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$, & $y = (17 + 3 - 2) : 3 = \frac{18}{3} = 6$.

PROBLEMA XXXVII.

378. *Datis summa progressionis arithmeticæ, numero terminorum & facto ex primo in ultimum, invenire terminos singulos.*

Sit factum $= a$
numerus terminorum $= n$
Summa $= c$
terminus I $= x$
ultimus $= y$
erit (§. 332. & *per condit. probl.*)

$$\frac{1}{2}n(x + y) = c \qquad xy = a$$
$$\overline{\qquad\qquad} : \frac{1}{2}n \qquad \overline{\qquad} : x$$
$$x + y = 2c : n \qquad y = a : x$$

h. e.

h. e. $x + \frac{a}{x} = \frac{2c}{n}$

$x^2 + a = \frac{2cx}{n}$

$x^2 - 2cx : n = -a$
$\quad c^2 : n^2 \quad c^2 : n^2$

$x^2 - 2cx : n + c^2 : n^2 = c^2 : n^2 - a$

$x - c : n = \sqrt{(c^2 : n^2 - a)}$
$c : n - x =$

$x = \frac{c}{n} \pm \sqrt{(c^2 : n^2 - a)}$

Signum + valet pro termino ultimo; ſignum autem — pro primo.

Sit $c = 57$, $n = 6$, $a = 34$; erit $x = \frac{57}{6} - \sqrt{\frac{(3249 - 34)}{36}} = 9\frac{1}{2} - \sqrt{(90\frac{1}{4} - 34)} = 9\frac{1}{2} - \sqrt{56\frac{1}{4}} = 9\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{225}{4}} =$

$9\frac{1}{2} + \frac{15}{2} = 17$ & $y = 9\frac{1}{2} - 7\frac{1}{2} = 2$

PROBLEMA XXXVIII.

379. *Invenire tres numeros continue proportionales, dato facto ex quadrato tertii in primum una cum denominatore rationis.*

Sit factum $= a$
denominator $= m$
terminus primus $= x$
erit secundus $= mx$
tertius $= m^2x$ } (§. 339.)

Quare per conditionem problematis

$$a = m^4 x^3$$
$$a : m^4 = x^3$$
$$\sqrt[3]{(a : m^4)} = x$$

Sit e. gr. $a = 648$, $m = 3$; erit $x = \sqrt[3]{(648 : 81)} = \sqrt[3]{8} = 2$

Æquatio prima in hanc resolvitur analogiam: $1 : m^4 = x^3 : a$ (§. 212.) Quare cum $1 : m^4$ sit ratio quadruplicata $1 : m$ (§. 116.); sequens enascitur.

Theorema. Cubus termini primi in proportione geometrica continua est ad factum ex quadrato tertii in primum in ratione quadruplicata primi ad secundum.

PROBLEMA XXXIX.

380. *Numerum datum in tres partes continue proportionales dividere, dato denominatore rationis.*

Sit

Sit numerus datus $= a$
denominator $= b$
pars prima $= x$;
erit ſecunda $= bx$
tertia $= b^2x$ (§. 339.).
& per conditionem problematis

$$b^2x + bx + x = a$$
$$\overline{ \quad b^2 + b + 1}$$
$$x = a : (b^2 + b + 1)$$

Sit $b = 4$, $a = 42$; erit $x = 42 : (16 + 4 + 1) = 42 : 21 = 2$

PROBLEMA XL.

381. *Numerum datum in terminos quotcunque proportionales reſolvere, dato denominatore rationis.*

Sit numerus datus $= a$
denominator $= m$
terminus I $= x$;
erit ſecundus $= mx$
tertius $= m^2x$
quartus $= m^3x$ &c.

Ergo per conditionem problematis

$$x + mx + m^2x + m^3x + m^4x \text{ \&c.} = a$$
$$x = a : (1 + m + m^2 + m^3 + m^4 \text{ \&c.})$$

Sit $a = 364$, $m = 3$ & termini ſint numero ſex; erit $x = 364 : (1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243) = 364 : 364 = 1$. Ergo 1. 3. 9. 27. 81. 243 eſt ſeries proportionalium quæſita.

PROBLEMA XLI.

382. *Inter duos numeros datos invenire quotcunque medios continue proportionales.*

RESOLUTIO.

Sit primus datorum $= a$
ultimus $= b$
mediorum primus $= x$
numerus mediorum $= m$
erit per conditionem problematis (§. 215. 339. 343.)

$$a.\ x.\ \frac{x^2}{a}.\ \frac{x^3}{a^2}.\ \frac{x^4}{a^3}\ \&c.\ \frac{x^m}{a^{m-1}}.\ b$$

consequenter (§. 342.)

$$x^{m+1} : a^{m-1} = ab$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} a^{m-1}$$

$$x^{m+1} = a^m b$$

$$x = \sqrt[m+1]{a^m b}$$

Sit $a=1$, $b=243$, $m=4$; erit $m+1 = 5$, adeoque $x = \sqrt[5]{243} = 3$, consequenter termini intermedii sunt 3. 9. 27. 81.

PROBLEMA XLII.

383. *Data summa termini primi & ultimi, itemque summa secundi & tertii in proportione sive continua, sive discreta,*

ta, una cum denominatore rationis, invenire terminos ſingulos.

Sit ſumma I $= a$
II $= b$
denominator $= m$
terminus primus $= x$
erit quartus $= a - x$
ſecundus $= mx$
tertius $= b - mx$

Quare per conditionem problematis

$$x : mx = b - mx : a - x$$

Hinc

$$ax - x^2 = mbx - m^2x^2$$
$$\qquad\qquad - x$$
$$a - x = mb - m^2x$$
$$m^2x - x = mb - a$$
$$\qquad\qquad m^2 - 1$$
$$x = \frac{mb - a}{m^2 - 1}$$

Sit $a = 13$, $b = 11$, $m = 2$; erit $x = (22 - 13) : (4 - 1) = 9 : 3 = 3$.

PROBLEMA LXIII.

384. *Datis in progreſſione geometrica termino primo & ultimo atque terminorum numero, invenire denominatorem rationis.*

Sit terminus primus $= a$
ultimus $= b$
numerus terminorum $= n$
denominator $= x$
Erit (§. 345.)

$b = x^2$

$$b = x^{n-1} a$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad} a$$
$$b : a = x^{n-1}$$
$$\overline{b^{1:(n-1)} : a^{1:(n-1)} = x}$$

Sit $a = 2$, $b = 486$, $n = 6$; erit $x = \sqrt[5]{}$ $(486 : 2) = \sqrt[5]{243} = 3$

PROBLEMA XLIV.

385. *Datis denominatore rationis, terminorum numero & summa progressionis geometricae, invenire terminum primum.*

Sit denominator $= m$
numerus terminorum $= n$
summa progress. $= c$
terminus I $= x$;
erit ultimus $= m^{n-1} x$
consequent. (§. 345.)

$$c = (m^n x - x) : (m - 1)$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad} m - 1$$
$$mc - c = m^n x - x$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad} m^{n-1}$$
$$(mc - c) : (m^n - 1) = x$$

Sit $m = 3$, $n = 6$, $c = 728$; erit $x = 2.728 : 728 = 2$.

Analogia, in quam aequatio penultima resolvitur, $c : x = m^n - 1 : m - 1$, suppeditat hoc

Theo-

Theorema : Summa progressionis geometricæ est ad terminum primum ut dignitas denominatoris rationis , cujus exponens numero terminorum æqualis est, unitate mulctata ad denominatorem ipsum unitate imminutum.

PROBLEMA XLV.

386. *Datis in progressione geometrica termino primo & ultimo una cum denominatore rationis , invenire numerum terminorum.*

Sit terminus primus $= a$
ultimus $= b$
denominator rationis $= m$
numerus terminorum $= x$;
erit (§. 345.)

$m^{x-1}\, a = b$, hoc est, si logarithmus ipsius a ponatur la & logarithmus ipsius $m = lm$.

$$xlm - lm + la = lb \quad (\text{§. } 252.\ 248.)$$

$$xlm = lb - la + lm$$

$$\underline{\qquad\qquad\qquad} lm$$

$$x = (lb - la) : lm + 1$$

Sit $a = 2$, $b = 486$, $m = 3$; erit

$$lb = 2.6866363$$
$$la = 0.3010300$$

$$lb\text{-}la = 2.3856063$$

3 1 1
lb-la = 2 3856063 (5
lm = 4771213 (1

6 = x

PRO-

PROBLEMA XLVI.

387. *Datis ſumma progreſſionis geometricæ, termino primo atque ultimo, invenire numerum terminorum, ac denominatorem rationis.*

Sit ſumma $= c$
terminus primus $= a$
ultimus $= b$
denominator rationis $= y$
numerus terminorum $= x$
erit (§. 345.)

$$c = (by - a) : (y - 1) \qquad b = y^{x-1} a$$

$$cy - c = by - a$$

$$cy - by = c - a$$

$$\underline{\qquad\qquad} c - b$$

$$y = (c - a) : (c - b)$$

Æquatio altera adhibitis logarithmis in ſequentem degenerat (§. 252. 248.

$$lb = xly - ly + la$$

$$lb + ly - la = xly$$

$$\underline{\qquad\qquad} ly$$

$$(lb - la) : ly + 1 = x$$

Quodſi ſubſtituatur valor ipſius ly paulo ante inventus, qui eſt,
$l(c - a) - l(c - b)$; habebimus.

$$\frac{lb - la}{l(c - a) - l(c - b)} + 1 = x$$

Sit $c = 728$, $a = 2$, $b = 486$; erit

$$lb = 2.6866363 \qquad c = 728$$
$$la = 0.3010300 \qquad b = 486$$

$$lb - la = 2.3856063 \qquad c - b = 242$$
$$l(c-a) = 2.8609366 \qquad c = 728$$
$$l(c-b) = 2.383814 \qquad a = 2$$

$$\text{Diff.} = 4771212 \qquad c - a = 726$$
$$2.3856063 \quad (5$$
$$4771212 \quad (1$$
$$6 = x$$

PROBLEMA XLVII.

388. *Datis in progressione geometrica facto ex primo in ultimum, numero terminorum & denominatore rationis, invenire terminum primum & ultimum.*

Sit factum $= f$
numer. termin. $= n$
denominator $= m$
terminus primus $= x$
ultimus $= y$

erit per conditiones problematis & §. 345.)

$$xy = f \qquad m^{n-1} x = y$$
$$\overline{\qquad\qquad} x$$
$$y = f : x$$

Quare (§. 65.)

$$f : x = m^{n-1} x$$
$$\overline{\qquad\qquad} x$$
$$f = m^{n-1} x^2$$
$$f : m^{n-1} = x^2$$
$$\sqrt{f} : \sqrt{m^{n-1}} = x$$

Sit $m=3$, $n=6$, $f=972$; erit $\sqrt{972:243}=\sqrt{4}=2$.

DEFINITIO XIII.

389. Tres vel quatuor *quantitates* dicuntur *harmonice proportionales*: ſi in priore caſu differentia primi & ſecundi fuerit ad differentiam ſecundi atque tertii, ut primus ad tertium; in caſu poſteriore differentia primi & ſecundi ad differentiam tertii & quarti ut primus ad quartum: E. gr. 10, 16 & 40 ſunt in proportione harmonica: eſt enim $6:24=10:40$. Si termini proportionales in caſu priore continuentur; oritur *Progreſſio harmonica.*

PROBLEMA XLVIII.

390. *Datis duabus quantitatibus, invenire tertiam harmonice proportionalem.*

Sit prima $=a$
ſecunda $=b$
tertia $=x$
erit (§. 389.)

$$b-a:x-b=a:x$$

$$ax-ab=bx-ax \quad (\S.\ 210.)$$

$$2ax-bx=ab$$

$$x=ab:(2a-b)$$

E. gr. Sit $a=10$, $b=16$; erit $x=160:(20-16)=160:4=40$.

Æqua-

Æquatio penultima in hanc resolvitur analogiam $2a-b: a=b: x$ unde sequens enascitur

Theorema: Si fuerint tres numeri harmonice proportionales; erit differentia secundi a duplo primi ad primum, ut secundus ad tertium.

COROLLARIUM I.

391. Si $2a=b$; erit $x=ab:o$, consequenter $1:o=x:ab$ (§. 123.). Quare cum non sit $1=o$, nec erit $x=ab$, adeoque in hoc casu nullus numerus harmonice proportionalis ipsis a & b inveniri potest. E. gr. Si $a=12$, $b=24$; juxta regulam $x=12.24:(24-24)=12.24:o$. Sed non licet 12. 24 seu 288 pro termino tertio assumere: alias enim foret $12:264=12:288$ (§. 389.): Quod absurdum. Multo minus inveniri poterit, si $b>2a$.

COROLLARIUM II.

392. Quodsi ex tribus proportionalibus 6. 8. 12 terminus secundus sumatur pro a, tertius pro b, invenietur quartus continue proportionalis $=8.12:(16-12)=8.12:4=8.3=24$.

COROLLARIUM III.

393. Cum eodem modo, si tertius pro a, quartus pro b sumatur, quintus inveniri queat & ita porro in infinitum; datis duobus terminis progressio, si possibile (§. 391.), conti-

nuatur per regulam inventam. E. gr. Si $a=10$, $12=b$; erit tertius $12.10:(20-12)=15$. Inde quartus $12.15:(24-15)=20$; quintus $15.20:(30-20)=30$; fextus $20.30:(40-30$. Sed ulterius continuari nequit, ob $60=2.30$ (§. 391.).

PROBLEMA XLIX.

394. *Datis duabus quantitatibus, invenire mediam hormonice proportionalem.*

Sit prima $=a$
fecunda $=x$
tertia $=b$

erit $x-a:b-x=a:b$ (§. 389)

$bx-ab=ab-ax$ (§. 210.)

$ax+bx=2ab$

$\quad\quad a+b$

$x=2ab:(a+b)$

E. gr. Sit $a=10$, $b=40$; erit $x=800:50=16$.

Æquatio penultima in hanc refolvitur analogiam: $a+b:2a=b:x$, unde

Theorema: Si fuerint tres numeri harmonice proportionales; erit fumma primi & ultimi ad primi duplum ut ultimus ad medium.

PROBLEMA L.

395. *Datis tribus quantitatibus, invenire quartam harmonice proportionalem.*

Sit

Sit prima $= a$
secunda $= b$
tertia $= c$
quarta $= x$
erit (§. 389.)

$b-a : x-c = a : x$

$bx-ax = ax-ac$ (§. 210.)

$ac = 2ax-bx$

$ac : (2a-b) = x$

Sit e. gr. $a = 6$, $b = 8$, $c = 12$; erit $72 : (12-8) = 72 : 4 = 18$.

Æquatio penultima in hanc resolvitur analogiam:

$2a-b : a = c : x$

Theorema: Si fuerint quatuor quantitates harmonice proportionales; erit ut differentia secundæ a duplo primæ ad primam, ita tertia ad quartam.

DEFINITIO XIV.

396. *Proportio contraharmonica* est ea terminorum trium relatio, in qua differentia primi & secundi est ad differentiam secundi & tertii ut tertius ad primum. E. gr. 3. 5 & 6 sunt numeri contraharmonice proportionales: est enim $2 : 1 = 6 : 3$.

PROBLEMA LI.

397. *Datis duabus quantitatibus, invenire tertiam contraharmonice proportionalem.*

Sit prima $= a$
secunda $= b$
tertia $= x$
erit (§. 396.)

$$b - a : x - b = x : a$$

$$ab - aa = x^2 - bx \text{ (§. 210.)}$$

$$\tfrac{1}{4}b^2 \qquad \tfrac{1}{4}b^2 \text{ (§. 358.)}$$

$$\tfrac{1}{4}b^2 + ab - a^2 = x^2 - bx + \tfrac{1}{4}b^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 + ab - a^2)} = x - \tfrac{1}{2}b \text{ ob } x > b$$

$$\tfrac{1}{2}b + \sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 + ab - a^2)} = x$$

E. gr. Sit $a = 3$, $b = 5$; erit $x = \frac{5}{2} + \sqrt{(\frac{25}{4} + 15 - 9)} = \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{5}{2} + \frac{7}{2} = \frac{12}{2} = 6$.

PROBLEMA LII.

398. *Datis duabus quantitatibus, invenire mediam contraharmonice proportionalem.*

Sit prima $= a$ media $= x$
tertia $= b$
erit (§. 396.)

$$x - a : b - x = b : a$$

$$ax - a^2 = b^2 - bx \text{ (§. 210.)}$$

$$ax + bx = a^2 + b^2$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \; a + b$$

$$x = (a^2 + b^2) : (a + b)$$

E. gr.

E. gr. Sit $a=3$, $b=6$; erit $x=(9+36):(3+6)=45:9=5$

Theorema: Si ſumma 2 quadratorum dividitur per ſummam radicum, quotus eſt inter radices medius contraharmonice proportionalis.

DEFINITIO XV.

399. *Numerus pronicus* eſt, qui aggregato ex radice & quadrato ejusdem æqualis.

COROLLARIUM I.

400. Si in progreſſione arithmetica terminus primus fuerit 2, differentia terminorum itidem 2, numerus terminorum $=n$; erit ſumma progreſſionis $=2n+\frac{1}{2}(n^2-n)2$ (§. 333.), $=2n+n^2-n=n^2+n$, adeoque numerus pronicus, cujus radix numero terminorum æqualis.

COROLLARIUM II.

401. Patet adeo numeros pronicos prodire per ſummationem progreſſionis numerorum parium. Sit enim

progreſſio 2. 4. 6. 8. 10 &c.
erunt pronici 2. 6. 12. 20. 30 &c.

PROBLEMA LIII.

402. *Ex dato numero radicem pronicam extrahere.*

RESOLUTIO.

Sit numerus datus $=a$, radix pronica $=x$

erit (§. 399.)

$$x^2+x=a$$
$$\tfrac{1}{4}\quad\tfrac{1}{4}\qquad (\S.\ 358.)$$
$$x^2+x+\tfrac{1}{4}=a+\tfrac{1}{4}$$
$$\tfrac{1}{2}+x=\sqrt{(a+\tfrac{1}{4})}=\frac{\sqrt{(4a+1)}}{\sqrt{4}}$$
$$=\tfrac{1}{2}\sqrt{(4a+1)}$$
$$x=\tfrac{1}{2}\sqrt{(4a+1)}-\tfrac{1}{2}$$

Theorema: Si quadruplo numeri pronici addatur unitas & radix dimidio mulctata bifariam dividatur, quotus est radix pronica.

Sit $a=72$; erit $x=\tfrac{1}{2}\sqrt{(4.72+1)}-\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{2}\sqrt{289}-\tfrac{1}{2}=\tfrac{17}{2}-\tfrac{1}{2}=8.$

Examen. Nam $64+8=72.$

PROBLEMA LIV.

403. *Invenire duos numeros, quorum summa una cum facto eorundem æquatur numero dato.*

Sit numerus datus $=a$, quæsitorum unus $=x$, alter $=y$; erit per conditionem problematis

$$xy + x + y = a$$
$$xy + x = a - y$$
$$\underline{\qquad\qquad\qquad -y+1}$$
$$x = (a - y) : (y + 1)$$

Sit $a = 30$, $y = 2$; erit $x = (30 - 2) : (2 + 1) = 28 : 3 = 9\frac{1}{3}$. Sit $a = 20$, $y = 2$; erit $x = (20 - 2) : (2 + 1) = 18 : 3 = 6$. Sit $a = 19$, $y = 4$; erit $x = (19 - 4) : (4 + 1) = 15 : 5 = 3$.

SCHOLION

404. *Istiusmodi Problemata, uti etiam sequentia, dicuntur indeterminata, quia variis modis solvi possunt.*

PROBLEMA LV.

405. *Invenire quatuor numeros ejus conditionis, ut summa primi & secundi æquetur tertio, differentia vero primi & secundi quarto.*

Sit numerus primus $= x$, secundus $= y$; tertius $= z$, quartus $= t$, erit per conditiones problematis

$$y + x = z \qquad\qquad x - y = t$$
$$x = z - y \qquad\qquad x = t + y$$

Quare (§. 65.)

$$t + y = z - y$$
$$t + 2y = z$$
$$2y = z - t$$
$$y = (z - t) : 2$$

Ergo $x = (z - t) : 2 + t = (z + t) : 2$.

 Unde

Unde apparet, si numeri integri desiderentur, pro z & t assumi debere vel numeros pares, vel impares: nequaquam alterum parem, alterum imparem.

Sit $z=8$, $t=2$: erit $y=(8-2):2=6:2=3$ & $x=(8+2):2=4+1=5$. Similiter sit $z=5$, $t=1$: erit $x=(5+1):2=3$ & $y=(5-1):2=2$.

PROBLEMA LVI.

406. *Invenire duos numeros, quorum summa æquatur quadrato minoris.*

Sit numerus major $=x$, minor $=y$: erit per conditionem problematis

$$\frac{x+y^2=y^2}{x=y^2-y=(y-1)y}$$

Unde apparet, numerum majorem esse factum ex minore in eundem minorem unitate mulctatum.

Sit $y=3$; erit $x=2.3=6$.
Sit $y=5$; erit $x=4.5=20$. Sit $y=9$; erit $x=8.9=72$.

PROBLEMA LVII.

407. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut summa quadratorum æquetur cubo minoris.*

Sit

Sit numerus major $= x$, minor $= y$: erit per conditionem problematis

$$\frac{x^2 + y^2 = y^3}{\dfrac{x^2 = y^3 - y^2 = y^2 (y-1)}{x = y\sqrt{(y-1)}}}$$

Apparet adeo, pro y assumendum esse numerum, qui unitate quadratum excedit, hoc est, quadratum quodlibet unitate auctum.

E. gr. Sit $y=5$; erit $x=5\sqrt{(5-1)}=5\sqrt{4}=5.\ 2=10$. Sit $y=17$, erit $x=17\sqrt{(17-1)}=17\sqrt{16}, =17.\ 4=68$.

PROBLEMA LVIII.

408. *Invenire duos quadratos numeros, qui differunt numero dato.*

Sit latus quadrati minoris $= x$, majoris $y + x$, differentia quadratorum $= d$: erit quadratum majus $= x^2 + 2xy + y^2$, minus $= x^2$, consequenter per conditionem problematis

$$\frac{2xy + y^2 = d}{2xy = d - y^2}$$
$$\overline{}\ {}^2y$$
$$x = (d - y^2) : {}^2y$$

 Un-

Unde apparet, pro y aſſumi debere numerum, qui ſit minor quam $\sqrt{d}$.

Sit e. g. $d=10$, $y=3$; erit $x=(10-9):6=\frac{1}{6}$ & $x+y=3+\frac{1}{6}=\frac{19}{6}$. Sit $d=11$, $y=1$: erit $x=(11-1):2=10:2=5$ & $x+y=5+1=6$. Sit $d=48$, $y=4$: erit $x=(48-16):8=6-2=4$ & $x+y=4+4=8$.

PROBLEMA LIX.

409. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut differentia ipſorum habeat ad differentiam quadratorum rationem datam.*

Sit numerus major $=x$, minor $=y$, ratio data $=a:b$; erit per conditionem problematis

$$x-y : x^2-y^2=a:b$$

$$\text{h. e. } 1 : x+y=a:b \quad (\S. 348.)$$

$$ax+ay=b$$

$$\overline{}\,a$$

$$x+y=b:a$$

$$x=b:a-y$$

Sit $b:a=9$, $y=4$; erit $x=5$. Vel ſit $=3$; erit $x=6$.

PRO-

PROBLEMA LX.

410. *Invenire numerum, qui si multiplicetur per duos numeros datos, quadrata duo producat.*

Sit numerus datus unus $=a$, alter $=b$, quaesitus $=x$: erit per conditiones problematis

$$ax=y^2 \qquad bx=v^2$$
$$\overline{\qquad\quad}\,a \qquad \overline{\qquad\quad}\,b$$
$$x=y^2:a \qquad x=v^2:b$$
$$y^2:a=v^2:b$$
$$\overline{\qquad\qquad}\,a$$
$$y^2=av^2:b$$
$$\overline{\qquad\qquad}$$
$$y=v\sqrt{(a:b)}$$

Quodsi ergo numerus rationalis desideretur, $a:b$ quadratus esse debet.

Sit $a=32$, $b=8$; erit $\sqrt{(a:b)}=2$. Sit porro $v=5$, erit $y=10$, consequenter $x=\frac{25}{8}$.

PROBLEMA LXI.

411. *Invenire duos numeros quadratos, quorum summa est numerus quadratus.*

Sint numeri quadrati quæsiti x^2 & y^2; latus quadrati, cui isti junctim sumti æquantur $vx - y$: erit

$$x^2 + y^2 = v^2x^2 - 2vxy + y^2$$

$$x^2 = v^2x^2 - 2vxy$$

$$x = v^2x - 2vy$$

$$2vy = v^2x - x$$

$$2vy : (v^2 - 1) = x$$

Sit $v = 2$, $y = 3$; erit $x = 12 : (4 - 1) = 12 : 3 = 4$.

ELE-

ELEMENTA GEOMETRIÆ.

PARS PRIOR
ELEMENTA GEOMETRIÆ PLANÆ EXHIBET.

CAPUT I.
DE PRINCIPIIS GEOMETRIÆ.

DEFINITIO I.

Geometria est ſcientia extenſorum, quatenus terminata ſunt, hoc eſt, Linearum ſuperficierum & ſolidorum.

DEFINITIO II.

2. *Congruere* dicuntur, quorum iidem termini eſſe poſſunt. Nempe *Congruentia* eſt coincidentia terminorum.

De-

DEFINITIO III.

3. *Punctum* eſt, quod quaquaverſum ſeipſum terminat, ſeu, quod non habet terminos alios a ſe diſtinctos.

COROLLARIUM I.

4. Ergo omne punctum alteri cuicunque congruit (§. 2.)

COROLLARIUM II.

5. Nec ullas in eo diſtinguere licet partes.

SCHOLION.

6. *Hinc* Euclides: *Punctum eſt*, inquit, *cujus pars nulla eſt. Nec ſine ratione punctum ut individuum concipiunt Geometræ, utut tale quid nec imaginari, nec pingere valeamus. In praxi enim ipſa Geometrica ſummo cum ſtudio cavendum, ne punctum pars lineæ habeatur, cujus terminus exiſtit.*

DEFINITIO IV.

Tab. I. Fig. I.

7. *Linea* deſcribitur, ſi punctum ab uno puncto A ad alterum B movetur.

COROLLARIUM I.

8. Termini igitur lineæ ſecundum longitudinem ſunt puncta A & B; ſecundum latitudinem & profunditatem ipſa ſui terminus eſt (§. 3.).

Co-

COROLLARIUM II.

9. Quoniam punctum partes nullas habet (§. 5.), linea nec lata, nec profunda esse potest, sed in solam longitudinem extenditur.

DEFINITIO V.

10. *Distantia* est linea brevissima inter duo.

SCHOLION.

11. *Ita e. gr. distantia arboris a domo est linea brevissima, quæ ab illa ad hanc duci potest.*

DEFINITIO VI.

Tab. I. Fig. 1.

12. *Linea recta* AB est, cujus pars quæcunque est toti similis.

COROLLARIUM.

13. Cum lineæ describantur, si punctum ab uno puncto ad alterum movetur (§. 7.); motus puncti describentis in omnibus lineæ partibus idem esse debet: secus enim diversitate hujus motus partes a se invicem distinguerentur, adeoque similes non forent (§. 19. *Arithm.*) contra definitionem (§. 12.). Quoniam itaque motus puncti differre nequit nisi celeritate ac directione, celeritas vero ad descriptionem rectæ nil confert; sola directionis habenda est ratio, consequenter recta describitur, si punctum ab uno puncto A ad alterum B eadem directione movetur. Lineæ igi-

igitur rectæ non differunt nisi quantitate. (§. 21. *Arithm.*)

Tab. I. Fig. I.

POSTULATUM I.

14. *A quovis puncto A ad quodvis punctum B posse duci lineam rectam.*

POSTULATUM II.

15. *Lineam rectam terminatam AB utrinque produci posse.*

DEFINITIO VII.

16. *Linea curva* est, cujus partes toti dissimiles.

DEFINITIO VIII.

17. *Metiri* idem est ac quantitatem aliquam pro unitate assumere ac aliarum homogenearum rationem ad eandem exprimere. Quantitas, quæ pro unitate assumitur, *Mensura* dicitur.

DEFINITIO IX.

18. Hinc *Mensura linearum* est linea recta arbitrariæ longitudinis, in partes minores pro lubitu dividenda & subdividenda. Dividitur autem hodie a Geometris in 10 partes æquales, qui *Pedes* vocantur: unde ipsa *Decempeda* appellatur. Pes subdividitur in 10 *Digitos*; digitus in 10 *Lineas* & ita porro.

SCHO-

SCHOLION I.

19. *Celebrium mensurarum varietates repræsentat tabula sequens in particulis istiusmodi, qualium pes Regius Parisinus est* 1440. *Continet is nempe* 12 *digitos, digitus* 12 *lineolas, lineola* 10 *particulas, adeoque pes integer particulas* 1440.

Pes Regius Parisinus	1440	Constantinopolitanus	3120
Rhenanus	$1391\frac{3}{10}$	Bononiensis	$1682\frac{2}{5}$
Romanus	1320	Argentorat.	$1282\frac{3}{4}$
Londin.	1350	Norimberg.	$1346\frac{3}{4}$
Suecicus	1320	Dantiscanus	$1271\frac{1}{2}$
Danicus	$1403\frac{2}{5}$	Halensis	1320
Venetus	1540	Vindobon.	1402

SCHOLION II.

20. *Stevinus indicem decempedarum constituit* 0, *pedum* 1, *digitorum* 2, *linearum* 3 *&c. tanquam denominatorum logarithmos* (§. 272. Arithm.), *quos circello inclusos numeris adscribit. Sed commodius* Johannes Bayerus *in Logistica decimali & Stereometria logarithmos characteribus Romanis expressos apicibus numerorum adscribit. E. gr. Tres perticæ, quinque pedes, septem digiti & octo lineæ ita scribuntur:* $3^{\circ}\ 5'\ 7''\ 8'''$. *Commodissimum sæpe accidit, si numeri integra sive decempedas designantes a fractionibus decimalibus, pedibus nempe, digitis lineis &c. puncto separentur, uti monuimus in Arithmetica* (§. 219.). *Ita loco* $3^{\circ}\ 5'\ 7''\ 8'''$ *scribemus* 3. 578.

DEFINITIO X.

21. *Superficies* eſt magnitudo duabus dimenſionibus prædita, ſeu in longitudinem & latitudinem extenſa.

COROLLARIUM.

22. Termini ſecundum longitudinem & latitudinem ſunt lineæ, ſecundum profunditatem ipſamet terminus ſui exiſtit.

DEFINITIO XI.

23. Per *perimetrum* intelligimus continuum, quo aliud continuum terminatur.

DEFINITIO XII.

24. *Figura* eſt continuum perimetro terminatum.

SCHOLION.

25. *Dicitur tam de ſuperficiebus, quam de ſolidis. In priori caſu perimetri ſunt lineæ; in poſteriori ſuperficies.*

DEFINITIO XIII.

26. *Figura rectilinea* eſt, cujus perimeter ex lineis rectis; *Curvilinea*, cujus perimeter ex curvis; *Mixtilinea*, cujus perimeter partim ex rectis, partim ex curvis conſtat.

DEFINITIO XIV.

27. *Latus* eſt linea, quæ eſt pars perimetri figuræ ſuperficialis.

DE-

DEFINITIO XV.

28. *Planum* ſeu *figura plana* eſt, ſi e quovis puncto perimetri ad quodlibet ejusdem rectam in eadem ducere licet.

DEFINITIO XVI.

29. *Circulus* eſt figura plana, linea in ſe redeunte terminata, ex cujus ſingulis punctis ad punctum intermedium C, quod *Centrum* vocari ſolet, ductæ rectæ ſunt inter ſe æquales. Linea illa *Peripheria* dicitur.

Tab. I. Fig. 2.

DEFINITIO XVII.

30. *Chorda* AB eſt recta a peripheria ad peripheriam ducta.

DEFINITIO XVIII.

31. *Diameter* AE eſt chorda per centrum C tranſiens. Ejus dimidium AC ſive recta CD ex centro C ad peripheriam ducta dicitur *Semidiameter*, item *Radius*.

COROLLARIUM.

32. Radii ergo unius circuli inter ſe æquales ſunt (§. 29.).

DEFINITIO XIX.

33. *Arcus* eſt pars quantalibet peripheriæ AB: *Gradus* vero eſt pars ejusdem trecenteſima ſexageſima. Quilibet

gradus in 60 *Minuta prima*; minutum quodlibet in 60 *ſecunda*; ſecundum unumquodque in 60 *tertia* &c. ſubdividitur.

COROLLARIUM.

34. Cum peripheria cujuslibet circuli in 360 gradus dividatur; circuli majoris gradus ſunt majores gradibus minoris.

SCHOLION

35. *Scrupula graduum ſunt fractiones ſexageſimales & apicibus ſuis notantur. Gradui tanquam integro ſeu unitati ceſſit* 0, *minuto primo* 1, *ſecundo* 2, *tertio* 3 *&c. conſequenter gradus cum ſuis ſcrupulis eodem modo ſcribuntur, quo decempeda cum ſuis* (§. 20.). *E. gr.* 3. *gradus*, 25 *minuta*, 16 *ſecunda ita ſcribis*: 3° 25′ 16″.

DEFINITIO XX.

36. *Circuli concentrici* ſunt, qui idem centrum habent: *Eccentrici* vero, qui habent, diverſa.

DEINITIO XXI.

Tab. I. Fig. 2.

37. *Segmentum circuli* eſt pars ipſius AFBA arcu AFB & chorda AB comprehenſa. Dicitur *Segmentum majus*, quod ſemicirculo majus eſt: *minus* vero, quod minus eſt.

DEFINITIO XXII.

Tab. I. Fig 2.

38. *Sector circuli* eſt pars ejus ACD duobus radiis AC & CD atque arcu AD comprehenſa.

DE-

DEFINITIO XXIII.

39. Recta HL circulum in L *tangit*, si ipsi ita occurrit, ut producta tota extra circulum cadat. Tab. I. Fig. 3.

COROLLARIUM.

40. Recta CL ex centro C ad contactum L ducta est radius circuli (§. 31.).

DEFINITIO XXIV.

41. Linea AB lineam CD *secat* in E, si eam dirimit in partes CE & ED cis & ultra ipsam sitas. Tab. I. Fig. 4.

DEFINITIO XXV.

42. *Angulus* est duarum linearum AB & AC in uno puncto A concurrentium mutua inclinatio. Lineæ AB & AC dicuntur *crura*; punctum concursus A *Vertex anguli*. Tab. I. Fig. 5.

SCHOLION.

43. *Angulus hic vel unica litera A vertici ejus adscripta, vel ad evitandam in casibus nonnullis confusionem tribus literis BAC indigitatur, ita, ut vertici adscripta medio loco ponatur. Sæpe nomen angulo imponit litera minor, veluti x, eidem inscripta. Utimur vero angulis ad linearum situm determinandum.*

DEFINITIO XXVI.

44. *Angulus insistere* dicitur lineæ, in qua crura ejus terminantur.

DEFINITIO XXVII.

Tab. I. Fig. 5. 45. *Menſura anguli* BAC eſt arcus DE ex vertice A radio prorſus arbitrario AE intra crura ejus AC & AB deſcriptus.

COROLLARIUM.

46. Anguli ergo diſtinguuntur per rationem arcuum ex vertice intra crura deſcriptorum ad peripheriam: diſtinguuntur enim per illos arcus, arcus vero per rationem ad peripheriam diſtinguere licet (§. 33.) Et eadem de cauſa quantitas anguli æſtimatur ex ratione arcus iſtius ad peripheriam.

SCHOLION.

47. *Tot ſcilicet graduum & ſcrupulorum dicitur eſſe angulus, quot graduum & ſcrupulorum eſt arcus DE* (§. 33.)

DEFINITIO XXVIII.

Tab. I. Fig. 6. 48. *Anguli contigui* FGH & HGI ſunt, quorum idem eſt vertex G & crus unum commune GH.

DEFINITIO XXIX.

Tab. I. Fig. 4. 49. Rectæ lineæ AE & EB *in directum* ſitæ ſunt, ſi ejusdem rectæ AB partes exiſtunt.

DEFINITIO XXX.

Tab. I. Fig. 4. 50. *Angulus deinceps poſitus* AEC dicitur, qui oritur, anguli AED latere uno ED in C producto.

Co-

COROLLARIUM I.

51. Habent adeo anguli deinceps positi AEC & AED crus unum AE commune & crus alterum unius CE in directum situm est cruri alteri alterius ED (§. 49.).

COROLLARIUM II.

52. Hinc anguli deinceps positi sunt contigui sed non contra (§. 48.).

DEFINITIO XXXI.

53. *Angulus rectus* KLM est, cui deinceps positus KLN æqualis est. Tab. I. Fig. 4.

DEFINITIO XXXII.

54. *Angulus obliquus* AEC est, cui deinceps positus AED inæqualis, Angulus acutus AEC est obliquus minor recto. *Angulus* obtusus AED est obliquus recto major. Tab. I. Fig. 7.

DEFINITIO XXXIII.

55. *Anguli verticales* o & x sunt, si crura unius AE & EC in directum jacent cruribus alterius EB & ED. Tab. I. Fig. 4.

DEFINITIO XXXIV.

56. Si lineæ ST duæ aliæ OA & RB a diversis plagis in diversis punctis A & B occurrant, *anguli*, quos cum ea efficiunt, x & y dicuntur *alterni*. Tab. I. Fig. 8.

DEFINITIO XXXV.

57. Si vero lineæ ST duæ aliæ AP & BR itidem in diversis punctis A & B, sed ab eadem plaga occurrant, *anguli*, quos cum ea efficiunt, u & y, item z & y, dicuntur *oppositi*: & quidem u dicitur *oppositus externus*, z vero *oppositus internus* ipsius y.

DEFINITIO XXXVI.

Tab. I. Fig. 9. 58. *Angulus ad peripheriam* est angulus ABD, cujus vertex B & crura BA atque BD in peripheria terminantur. Dicitur etiam *Angulus in segmento*.

COROLLARIUM.

59. Intercipitur adeo a duabus chordis AB & BD (§. 30 & 42.) atque arcui AD insistit (§. 44.)

DEFINITIO. XXXVII.

60. *Angulus ad centrum* est angulus ACD, cujus vertex in centro circuli C est, crura vero AC & CD in peripheria terminantur.

COROLLARIUM.

61. Augulus ad centrum a duobus radiis intercipitur (§. 31.), adeoque arcui AD insistit (33. 44.), consequenter arcus AD ejus mensura (§. 45.).

DEFINITIO XXXVIII.

62. *Angulus extra centrum* HKI eſt, cujus vertex K extra centrum eſt, crura vero HK & IK in peripheria terminantur. Tab. I. Fig. 10.

COROLLARIUM.

63. Inſiſtit ergo arcui HI (§. 33. 44).

DEFINITIO XXXIX.

64. *Angulus contactus* HLM eſt, quem arcus circuli ML cum tangente HL ad contactum efficit. Tab. I. Fig. 3.

DEFINITIO XL.

65. *Angulus ſegmenti* MLH vel MLK eſt, quem chorda ML cum tangente HL vel LK ad contactum L efficit.

DEFINITIO XLI.

66. *Linea* KL *perpendicularis* aut *normalis* eſt ad alteram LM, ſi cum ea efficit rectum. Tab. I. Fig. 7.

COROLLARIUM.

67. Si igitur LK ad NM perpendicularis; anguli ad L deinceps poſiti æquales ſunt (§. 53.) & contra.

DEFINITIO XLII.

68. *Linea* AB eſt ad alteram AC *obliqua*, ſi cum ea efficit angulum obliquum. Tab. I. Fig. 5.

DEFINITIO XLIII.

69. *Linea* OP *parallela* eſt alteri QR, ſi ubique eandem ab ea diſtantiam ſervat. Tab. I. Fig. 8.

COROLLARIUM.

70. Lineæ ergo parallelæ in infinitum continuatæ non concurrunt.

DEFINITIO XLIV.

Tab. I. Fig. 11. 71. *Lineæ convergentes* TO & VQ sunt, quarum distantia continuo fit minor.

DEFINITIO XLV.

72. *Lineæ divergentes* TN & VP sunt, quarum distantia continuo fit major.

DEFINITIO XLVI.

73. *Triangulum* est figura tribus lineis terminata.

DEFINITIO XLVII.

Tab. I. Fig. 12. 74. *Triangulum æquilaterum* ABC est, cujus omnia latera inter se æqualia sunt. In genere *Figura æquilatera* dicitur, cujus latera singula inter se æqualia.

DEFINITIO XLVIII.

Tab. I. Fig. 13. 75. *Triangulum æquicrurum* sive *Isosceles* DEF est, quod duo latera æqualia habet.

DEFINITIO. XLIX.

Tab. I. Fig. 14. 76. *Triangulum scalenum* ACB est, cujus nullum latus alteri æquale, seu cujus singula latera sunt inter se inæqualia.

DE-

DEFINITIO L.

77. *Triangulum rectangulum* KML est, cujus angulus unus K rectus est: Tab. I. Fig. 15.

DEFINITIO LI.

78. *Triangulum obtusangulum* PNO est, cujus angulus unus N est obtusus. Tab. I. Fig. 16.

DEFINITIO LII.

79. *Triangulum acutangulum* ACB est, cujus singuli sunt acuti. Tab. I. Fig. 12.

DEFINITIO LIII.

80. *Triangulum obliquangulum* est, cujus singuli anguli sunt obliqui.

DEFINITIO LIV.

81. *Hypothenusa* ML est latus in triangulo rectangulo angulo recto K oppositum. Tab. I. Fig. 15.

DEFINITIO LV.

82. *Catheti* sunt latera trianguli rectanguli MK & KL angulum rectum K intercipientes.

DEFINITIO LVI.

83. *Figura quadrilatera* est, cujus perimeter ex quatuor lateribus constat. *Rectangula* dicitur, si anguli ejus singuli fuerint recti; *obliquangula*, si obliqui.

DE-

DEFINITIO LVII.

Tab. I. Fig. 17. 84. *Quadratum* ABDC eſt figura quadrilatera, æquilatera, rectangula.

DEFINITIO LVIII.

Tab. I. Fig. 19. 85. *Rhombus* EFHG eſt figura quadrilatera, æquilatera, obliquangula.

DEFINITIO LIX.

Tab. I. Fig. 18. 86. *Rectangulum* ſive *oblongum* MLKI eſt figura quadrilatera, rectangula, latera oppoſita ML & IK item IM & LK æqualia habens.

DEFINITIO LX.

Tab. I. Fig. 20. 87. *Rhomboides* NOPQ eſt figura quadrilatera, obliquangula, latera oppoſita OP & NQ, item ON & PQ æqualia habens.

DEFINITIO LXI.

88. *Parallelogramum* eſt figura quadrilatera, cujus latera oppoſita ſunt parallela. (§. 69.)

DEFINITIO LXII.

Tab. II. Fig. 21. 89. *Trapezium* RTVS eſt figura quadrilatera non parallelogramma.

DEFINITIO LXIII.

Tab. II. Fig. 22. 23. 90. *Figura poligona* ſeu *multilatera* ABCED vel FGHKI eſt, cujus perimeter

ter ex pluribus, quam quatuor, lateribus componitur. Quodsi latera fuerint quinque *Pentagonum*; si sex *Hexagonum*; si septem *Heptagonum*; si octo, *Octogonum* &c. dicitur.

DEFINITIO LXIV.

91. *Figura æquiangula* est, cuius singuli anguli æquales sunt.

DEFINITIO LXV.

92. *Figura regularis* est figura æquilatera & æquiangula.

DEFINITIO LXVI.

93. *Figura irregularis* est, quæ non simul æquilatera & æquiangula.

DEFINITIO LXVII.

94. *Figuræ inter se æquilateræ* dicuntur, si singula latera unius fuerint sigillatim æqualia singulis lateribus homologis alterius.

DEFINITIO LXVIII.

95. *Figuræ inter se æquiangulæ* sunt, si singuli anguli unius singulis angulis homologis alterius æquales sunt.

DE-

DEFINITIO LXIX.

96. Dicuntur vero tam *anguli* quam *latera homologa*, si eundem ordinem a primo in utraque figura servent.

DEFINITIO LXX.

Tab. I. Fig. 20. 97. *Diagonalis* PN est recta ex vertice anguli unius P in verticem alterius N ducta.

DEFINITIO LXXI.

Tab. I. Fig. 15. 98. *Basis figuræ* est perimetri pars ima KL.

COROLLARIUM.

99. Cum situs figuræ ipsi non sit essentialis, quamlibet perimetri partem seu latus figuræ quodlibet pro basi assumere licet.

DEFINITIO LXXII.

Tab. I. Fig. 15. 100. *Vertex figuræ* M est vertex anguli basi KL oppositus.

DEFINITIO LXXIII.

101. *Altitudo figuræ* est distantia verticis a basi, sive perpendiculum ex vertice in basin demissum. (§. 66.)

DEFINITIO LXXIV.

Tab. VI. Fig. 84. 102. *Figura* ABCDE dicitur *circulo inscripta*, si peripheria per vertices singulorum

lorum angulorum ipsius transit: tuncque *Circulus* figuræ dicitur *circumscriptus*.

DEFINITIO LXXV.

103. *Figura* abcde dicitur *circulo circumscripta*, si singula ejus latera peripheriam tangant, tumque *circulus* figuræ dicitur *inscriptus*.

Tab. VI. Fig. 84.

DEFINITIO LXXVI.

104. *Mensura figuræ* est quadratum, cujus latus perticæ æquale, diciturque *pertica quadrata*, & in pedes quadratos, sicut pes quadratus in *digitos quadratos* dividitur.

DEFINITIO LXVII.

105. *Eodem modo determinari* dicuntur, si data, per quæ unum determinatur, fuerint similia datis, per quæ determinatur alterum, seu utrobique ex datis similibus per easdem regulas reliqua determinantur.

COROLLARIUM.

106. Quæ itaque eodem modo determinantur, in iis coincidunt ea, per quæ discerni debent, adeoque similia sunt (§. 19. *Arithm.*

CA-

CAPUT II.

DE PROPOSITIONIBUS QUIBUSDAM FUNDAMENTALIBUS.

Problema I.

107. *A dato puncto ad datum punctum lineam rectam ducere.*

Resolutio.

I. In charta
Linea recta ducitur juxta regulam ad puncta data applicatam graphio, penna aut plumbagine.

II. In ligno vel ſaxo
Recta delineatur etiam ſine regula, ſi filum creta vel ceruſſa delibutum punctis datis apprimatur & medio digitis prehenſo ſurſum trahatur moxque iterum demittatur.

III. In campo
Recta deſignatur per baculos in punctis datis beneficio libellæ ad horizontem perpendiculariter defixos; quorum ſummitati muccinium aut folium chartæ mundæ alligatur, ſi e longinquo videri debeant.

PROBLEMA II.

108. *Duobus baculis in ſolo defixis, tertium vel plures in eadem recta cum iis infigere.*

RESOLUTIO.

Baculus ita infigitur, ut oculo in unum directo ceteri non appareant.

Ratio a luminis rectilinea propagatione petenda, de qua in Opticis.

PROBLEMA III.

109. *Lineam rectam metiri.*

RESOLUTIO.

Ad manus ſit neceſſe eſt menſura (§. 17.) Nimirum pro lineis in charta datis abſcindantur ex RT 10. partes æquales longitudinis arbitrariæ, quæ pedes deſignent: intervallum vero 10. pedum RS in reſiduum lineæ transferatur, quoties fieri poteſt (§. 18.). In campo vel catena, vel fune cannabino, vel pertica in digitos, pedes & decempedas legitime diviſis utimur. Sufficit autem ultimam decempedam in pedes & pedem ultimum in digitos dividi. Quodſi ergo lineam rectam metiri jubearis.

Tab. II. Fig. 24.

I. In charta

1. Ponatur crus circini unum in A & eousque aperiatur, donec alterum extremum B attingat.

2. Mox circini crus unum in fine decempedæ alicujus, e, gr. in 10. ponatur & notetur, quemnam pedem mensuræ alterum attingat, e. gr. 5. Erit linea AB 1°5′.

II. In Campo

1. In utroque lineæ extremo erigantur baculi (§. 107.) &, si ea mensuræ longitudinem superet, constituantur cum iis alii in eadem recta (§. 108.).

2. Funis cannabinus aut catena mensuram largiens ab uno baculo usque ad alterum ita extendatur, ut utrumque ad angulos rectos secet(§.53.): quod perpendiculo appenso evidens redditur.

3. Decempedæ, pedes atque digiti inter utrumque intercepti numerentur.

PROBLEMA IV.

110. *Ex dato quovis centro, dato radio quocunque, circulum describere.*

RESOLUTIO.

I. In charta

1. Collocetur circini crus unum in centro dato & aperiatur intervallo radii dati.

2. Moveatur circinus circa centrum: ita crus alterum peripheriam designabit (§. 29.).

II. In solo & quotiescunque circini apertura tanta fieri nequit, quanta requiritur,

ritur, radii vice fungitur filum, funiculus, aut virga five lignea, five ferrea.

COROLLARIUM.

111. Quoniam unius circuli peripheria eodem modo determinatur, quo peripheria alterius cujuscunque (§. 105.); omnes peripheriæ funt inter fe fimiles (§. 106.). Eodem modo patet, omnes circulos & femicirculos effe inter fe fimiles.

THEOREMA I.

112. *Diameter AE dividit tam peripheriam, quam circulum ipfum in duas partes æquales.* Tab. I. Fig. 2.

DEMONSTRATIO.

Partes peripheriæ ADE & ABE, itemque circuli ADECA & ABECA determinantur, recta AC circa centrum C mota, donec fibi in directum jaceat (§. 110.). Sunt adeo arcus ABE & ADE partes peripheriæ, fegmenta ABECA & ADECA partes circuli eodem modo determinatæ, adeoque fimiles (§. 106.). Quamobrem illi ad peripheriam, hæc ad circulum eandem rationem habent (§. 120. *Arithm.*), confequenter tum illi, tum hæc inter fe æquantur (§. 126. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

113. Super quavis igitur linea AE ex assumto in ea puncto C (producta, si opus sit, (§. 15) describi potest semicirculus.

THEOREMA II.

Tab. II. Fig. 25.

114. *Si ex centro C duorum circulorum concentricorum ducantur radii CDA & CEB; tum arcus DE & BA ad peripherias, tum sectores DCE & ACB ad areas suorum circulorum eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

Cum circuli concentrici *per hypoth.* idem centrum C habeant (§. 36.), & arcus AB atque DE, itemque sectores ACB & DCE describantur radiis AC & DC a communi termino CDA ad communem terminum CEB motis (§. 110.); arcus isti atque sectores eodem modo determinantur (§. 105.), consequenter illi peripheriarum, hic circulorum partes similes sunt (§. 106.), adeoque illi ad peripherias, hi ad circulos eandem rationem habent (§. 120. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

115. Cum arcus DE & AB intra crura ejusdem anguli ACB ex ejus vertice C descripti sint arcus circulorum concentricorum (§. 36.); ad suas quoque peripherias eandem ratio-

rationem habent (§. 114.), consequenter inter se sunt ut peripheriæ (§. 122. *Arithm.*) Quoniam itaque peripheriæ eundem numerum graduum continent (§. 33.); ipsi quoque eundem continere debent.

COROLLARIUM II.

116. Quia anguli quantitas æstimatur per rationem arcus ex vertice intra crura descripti ad totam peripheriam (§. 46.); perinde est, quocunque radio arcus iste describatur (§. 114.).

COROLLARIUM III.

117. Eadem ergo manet anguli quantitas, sive crura producantur, sive minuantur.

THEOREMA III.

118. *Angulorum æqualium A & a mensuræ BC & de sunt arcus similes, & contra si angulorum A & a mensuræ BC & de similes sunt, anguli æquales sunt.* Tab. II. Fig. 37.

DEMONSTRATIO.

Cum anguli cujuscunque A vel *a* quantitas æstimetur per rationem arcus BC vel *de* ex vertice A vel *a* intra crura descripti ad integram peripheriam (§. 46.); si A=*a*, ratio arcuum BC & *de* ad peripherias suorum circulorum eadem esse debet, consequenter cum sint partes suarum peripheriarum (§. 33.), similes sunt (§. 120. *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Si arcus BC & *de* menſuræ angulorum A & *a* (§. 45.) fuerint ſimiles; ad peripherias, quarum partes ſunt (§. 33.), eandem rationem habent (§. 120. *Arith.*). Quare cum quantitas angulorum A & *a* per eam rationem æſtimetur (§. 46.), eadem omnino eſſe debet, hoc eſt, anguli æquales ſunt. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

119. Cum arcus ſimiles eandem rationem habeant ad peripherias, quarum ſunt partes (§. 120. *Arithm.*), ſi fuerint partes æqualium peripheriarum, æquales ſunt (§ 126. *Arithm.*): Si ergo menſuræ angulorum æqualium fuerint partes ejusdem peripheriæ vel æqualium peripheriarum, æquales ſunt (§. 118.) & contra.

THEOREMA IV.

Tab. I. Fig. 7.

120. *Anguli recti KLM menſura eſt quadrans circuli.*

DEMONSTRATIO.

Producatur LM in N (§. 15.); erit *x*=*o* (§. 53.). Sed cum ex L ſuper recta NM deſcribi poſſit ſemicirculus (§. 113.) angulorum *x* & *o* menſuræ AC & CB junctim ſumtæ conficiunt ſemicirculum (§. 45.). Ergo unius menſura eſt dimidius ſemicirculus, hoc eſt, circuli quadrans. *Q. e. d.*

Co-

Corollarium I.

121. Cum quadrans circuli 90° complectatur (§. 33.); angulus rectus est 90° (§. 47.).

Corollarium II.

122. Omnes adeo recti sunt inter se æquales (§. 118.), & æqualis recto etiam rectus est.

Corollarium III.

123. Acutus igitur minor, obtusus major est quam 90° (§. 54.).

Theorema V.

124. *Duo anguli deinceps positi x & y, aut quotcunque ad idem punctum E super eadem recta CD constituti, sunt æquales duobus rectis. Et contra, si x & y fuerint duobus rectis æquales, CE sita est in directum ipsi ED.*

Tab. I. Fig. 4.

Demonstratio.

Quoniam in casu priore anguli x & y sunt deinceps positi, *per hypoth.* EC cum ED eandem rectam constituit (§. 50.). In casu posteriore omnes anguli constituti sunt super eadem recta CD ad idem punctum E, *per hypoth.* Quare cum ex E super CD describi possit semicirculus (§. 113.); in utroque casu mensura omnium angulorum simul est semicirculus (§. 45.). Sed idem est

 men-

mensura duorum rectorum (§. 120.). Ergo anguli isti sunt duobus rectis æquales (§. 119.). *Quod erat unum.*

Quodsi x & y fuerint duobus rectis æquales, nec tamen CE ponatur ipsi ED in directum sita, recta quædam alia, veluti EA, ipsi ED in directum jacebit (§. 15.), atque hinc o + y & x erunt deinceps positi (§. 50.), consequenter duobus rectis æquales, *per demonstrata*, adeoque o + y + x = y + x (§. 65. *Arith.* & §. 122. *Geom.*): quod cum sit absurdum (§. 63. *Arith.*), CE ipsi ED in directum sita. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM I.

125. Anguli, qui sunt deinceps, *x* & *y*, aut plures circa idem punctum ejusdem rectæ constituti, si junctim sumantur, conficiunt 180° (§. 121.).

COROLLARIUM II.

126. Angulorum deinceps positorum dato uno, alter itidem datur: relinquitur nimirum, si datus ex 180° subducatur.

COROLLARIUM III.

127. Si in campo angulum inaccessum vel obtusum Quadrante metiri jubemur & eum qui est deinceps, accedere licet; illius loco hunc metimur: ex 180° enim subductus quæsitum relinquit (§. 126.).

COROLLARIUM IV.

128. Certus evades, te omnes figuræ rectilineæ angulos in campo exacte dimensum esse, si, finita operatione, deinceps positos etiam metiaris & hos singulos illis singulis addas: quodsi enim ubique prodierit summa 180°, operatio rite peracta (§. 125.)

PROBLEMA V.

Tab. II. Fig. 27.

129. *Angulum metiri.*

RESOLUTIO.

Cum anguli ACB mensura sit arcus DE ex centro C intra crura AC & CB descriptus (§. 45.), totum negotium huc redit, ut numerus graduum, qui arcui DE competunt, determinetur: id quod fit ope semicirculi in 180° exactissime divisi. Nimirum

I. In charta

1. Centrum semicirculi ad verticem anguli C applicatur, & radius ejus CE cruri BC admovetur.
2. Gradus in arcu DE inter crura anguli AC & CB intercepto numerantur.

II. In Campo

Tab. II. Fig. 28.

1. Instrumentum goniometricum ita collocatur, ut radius ejus CG uni cruri anguli; centrum vero C vertici ejusdem immineat. Prius obtinetur, collineando per dioptras F & G, seu

ſeu pinnulas immobiles ad diametrum perpendiculariter erectas, verſus baculum in extremo cruris defixum; poſterius vero, perpendiculum ad centrum inſtrumenti applicando.

2. Regula HI circa centrum mobilis verſus crus anguli alterum promovetur, donec per pinnulas ipſi affixas baculus in extremo ejus defixus collineanti occurrat.

3. Gradus, quem regula in inſtrumento indicat, notatur.

S c h o l i o n.

130. *Semicirculus minor, quo in charta utimur, inſtrumentum transportatorium vulgo appellatur. In campo quidam circulo integro; quidam nonniſi quadrante utúntur.*

P r o b l e m a VI.

Tab. II. Fig. 27.

131. *Data quantitate anguli, ipſum deſcribere.*

R e s o l u t i o.

I. In charta

1. Ducatur recta CB &

2. Super alterum ejus extremum C ponatur centrum inſtrumenti transportatorii, ita, ut radius ejus cum recta CB coincidat.

3. Numerentur gradus dati ab E verſus D & ad gradum ultimum notetur punctum D.

4. Du-

4. Ducatur recta CDA. Erit ACB angulus quæsitus (§. 118.).

II. In campo

Tab. II. Fig. 28.

1. Collocetur instrumentum goniometricum ut in probl. præc. (§. 129.).
2. Regula HI circa centrum C ad gradum datum promoveatur.
3. Baculus ita erigi jubeatur, ut per dioptras collineanti occurrat.

THEOREMA VI.

Tab. I. Fig. 4.

132. *Si recta AB alteram CD secet in E, anguli verticales x & o, item y & E, sunt æquales.*

DEMONSTRATIO.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=180^\circ \\ y+o=180^\circ \end{array}\right\} (\text{§. } 125.)$$

Ergo $x+y=y+o$ (§. 65. *Arith.*), adeoque $x=o$ (§. 69. *Arithm.*). Eodem modo ostenditur, esse $y=E$. Q. *e. d.*

COROLLARIUM.

133. Quodsi in campo aut alio in casu angulum inaccessum *x* metiri jubeamur; accessum vero non neget verticalis *o*: hunc ejus loco metiri licet.

THEOREMA VII.

Tab. I. Fig. 4.

134. *Omnes anguli* x, y, o, E *&c. circa punctum aliquod E constituti sunt æquales quatuor rectis.*

DE-

Demonstratio.

Deſcribatur ex puncto E, vertice cummuni angulorum x, y, o, E &c. (§. 42.), intervallo quocunque E *a* circulus (§. 110.); evidens eſt, menſuras omnium angulorum ſimul ſumtas *db*, *bc*, *ca*, *ad* &c. conficere integram circuli peripheriam (§. 120.). Menſura ergo angulorum *x*, *y*, *o*, E &c. junctim ſumtorum eſt circulus integer (§. 45.). Sed circulus eſt menſura quatuor rectorum (§. 120.). Ergo omnes iſti anguli æquales ſunt quatuor rectis (§. 118.). *Q. e. d.*

Corollarium.

135. Omnes itaque anguli circa idem punctum conſtituti junctim 360° conficiunt (§. 121.).

Theorema VIII.

136. *Quæ ſibi mutuo congruunt, ea & æqualia, & ſimilia ſunt.*

Demonstratio.

Quæ ſibi mutuo congruunt, eorum iidem eſſe poſſunt termini (§. 2.). Ergo unum in locum alterius ſalva quantitate ſubſtituere licet: conſequenter æqualia ſunt (§. 12. *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Por-

Porro quoniam, quæ ſibi mutuo congruunt, eosdem terminos habere poſſunt (§. 2.): quin eodem modo determinari queant dubitandum non eſt. Sunt igitur ſimilia (§. 106.). *Quod erat alterum.*

THEOREMA IX.

137. *Quæ æqualia & ſimilia ſunt, ea ſibi mutuo congruunt.*

DEMONSTRATIO.

Similia differre nequeunt, niſi quantitate (§. 21. *Arithm.*). Quamobrem ſi æqualia fuerint, prorſus non differunt (§. 12. *Arithm.*). Jam ſi ſibi mutuo ſuperimpoſita non iisdem terminis continerentur, diverſitate terminorum differrent: quod cum ſit abſurdum *per demonſtrata*, iisdem terminis contineri debent, conſequenter ſibi mutuo congruunt (§. 2.). *Q. e. d.*

THEOREMA X.

138. *Si linea lineæ congruit, ſingula puncta unius ſingulis punctis alterius congruere debent.*

DEMONSTRATIO.

Linearum enim, quæ ſibi mutuo congruunt, iidem termini eſſe poſſunt (§. 2.). Sed termini linearum ſecundum longitudinem ſunt duo puncta; ſecundum latitudinem & profunditatem ipſæmet

met ſui termini exiſtunt (§. 8.). Ergo ſi lineæ congruunt, non modo puncta extrema, ſed etiam omnia intermedia congruere debent. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

139. Si centra & radii duorum circulorum congruunt; etiam peripheriæ, in quibus radii terminantur (§. 31.), conſequenter circuli ipſi congruere debent (§. 2.).

COROLLARIUM II.

140. Ex uno itaque puncto eodem radio circulus nonniſi unicus deſcribi poteſt.

THEOREMA XI.

Tab. II. Fig. 26.

141. *Si fuerint duo anguli* BAC *&* bac *æquales, & vertex unius* a *ponatur ſuper verticem alterius* A; *præterea crus illius* ac *ſuper crus hujus* AC: *etiam crus alterum* ab *ſuper alterum* AB *cadet.*

DEMONSTRATIO.

Si negas, neceſſe eſt ut *ab* vel intra angulum BAC, vel extra eum cadat. Ducatur ex A radio AD arcus Df (§. 110.): erit DE menſura anguli BAC, *De* vel *Df* menſura anguli *bac* (§. 45.). Ergo in caſu priore *De* menſura anguli *bac* minor; in poſteriore eadem menſura *Df* major foret menſura anguli BAC (§. 16. *Arithm.*). Quod utrumque cum ſit abſur-

ſurdum (§. 119.); crus *ab* ſuper AB cadit. *Q. e. d.*

THEOREMA XII.

142. *Si vertex & crura anguli unius DAE ſupra verticem & crura alterius BAC cadant; angulus unus DAE alteri BAC æqualis eſt.*

Tab. I. Fig. 5.

DEMONSTRATIO.

Deſcribatur enim ex communi vertice A intra crura AD & AE arcus DE (§. 110.); erit is menſura anguli DAE (§. 45.). Sed quoniam crura DA & AE ſupra crura alterius anguli BA & AC cadunt, *per hypoth.* idem arcus DE inter crura AB & AC intercipitur. Eſt igitur & menſura anguli BAC (§. *cit.*), conſequenter DAE = BAC (§. 119.). *Q. e. d.*

THEOREMA XIII.

143. *Lineæ rectæ æquales ſibi mutuo congruunt.*

Tab. II. Fig. 29.

DEMONSTRATIO.

Eſt *ab*=AB *per hypoth.* Eſt vero etiam recta *ab* ſimilis rectæ AB (§. 12.). Ergo *ab* ipſi AB congruit (§. 137.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

144. Ergo ſi recta *ab* alteri æquali AB ita applicetur, ut punctum *a* ſupra A & *ab* ſupra AB cadat, etiam *b* ſupra B cadet (§. 28.).

Co-

COROLLARIUM II.

145. Si rectarum extrema coincidunt, singula puncta unius erunt in recta altera (§. 138.), atque hinc inter duo puncta nonnisi unica recta cadit.

THEOREMA XIV.

Tab. I. Fig. 2.

146. *Si centro circuli C applicetur lineæ rectæ CD, radio AC æqualis, extremum unum; alterum peripheriam attinget.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam recta CD radio æqualis, *per hypoth.* ipsi congruet (§. 143.); adeoque eosdem cum eo terminos habere debet (§. 2.). Sed radius ex centro eductus in peripheria terminatur (§. 21.). Ergo & recta CD ipsi æqualis, si alterum extremum in C hæreat, altero peripheriam attinget. *Q. e. d.*

THEOREMA XV.

147. *Anguli similes sunt etiam æquales.*

DEMONSTRATIO.

In angulis similibus ea coincidunt, per quæ a se invicem discerni debent (§. 19. *Arithm.*). Quare cum anguli distinguantur,

tur per rationem arcuum ex vertice intra crura deſcriptorum ad peripheriam (§. 46.), ſi anguli ſunt ſimiles, arcus iſti ad ſuas peripherias eandem rationem habere, hoc eſt, & ipſi ſimiles eſſe debent (§. 118. *Geom.* & §. 120. *Arith.*). Sunt igitur anguli æquales (§. 118.). *Q. e. d.*

Theorema XVI.

148. *In figuris ſimilibus anguli homologi ſunt æquales & latera homologa proportionalia.*

Demonstratio.

In figuris ſimilibus ea coincidunt, per quæ a ſe invicem diſcerni debent (§. 19. *Arith.*). Quare cum figuræ nequeant diſtingui niſi per angulos & latera; illi æquales (§. 147.), hæc proportionalia eſſe debent (§. 112. *Arith.*). *Q. e. d.*

Theorema XVII.

149. *Figurarum ſibi mutuo congruentium* RTVS & rtus *anguli & latera homologa inter ſe æqualia ſunt.* Tab. II. Fig. 21.

DEMONSTRATIO.

Quoniam figuræ RTVS & *rtus* ſibi mutuo congruunt, *per hypoth.* iidem utriusque termini eſſe poſſunt (§. 2.). Quare cum termini earum ſint perimetri (§. 23.); una *rtus* ſupra alteram RTVS ita poni poteſt, ut *tu* ipſi TV, *tr* ipſi TR, *rs* ipſi RS &c. congruat. Ergo latera homologa ſunt inter ſe æqualia (§. 136.). *Quod erat unum.*

Sunt vero T & *t*, R & *r*, S & *s* &c. vertices; TV, TR, RS, SV & *tu*, *tr*, *rs*, *su* crura angulorum homologorum (§. 42.). Quamobrem & anguli homologi æquales ſunt (§. 142.). *Quod erat alterum.*

CAPUT III.

DE LINEARUM RECTARUM ET TRIANGULORUM SYMPTOMATIS.

THEOREMA XVIII.

Tab. II. Fig. 31.

150. *Si in duobus triangulis* ABC & abc *fuerit* A=a, *AB=ab*, *AC=ac*; *erit*

etiam

etiam BC = bc, C = c, B = b *totaque triangula æqualia & ſimilia erunt.*

Demonstratio.

Concipiamus, triangulum *abc* ita poni ſuper alterum ABC, ut punctum *a* ſuper A & recta *ab* ſuper AB cadat. Quoniam *ab*=AB, *a*=A & *ac*=AC, *per hypoth.* punctum *b* ſuper B (§. 144.), recta *ac* ſuper AC (§. 141.) & punctum *c* ſuper C (§. 144.), conſequenter *bc* ſuper BC (§. 145.) cadit, adeoque △ *abc* alteri ABC congruit (§. 2.), conſequenter *bc*=BC (§. 136.), *c*=C & *b*=B (§. 142.), totaque triangula æqualia & ſimilia ſunt (§. 136.). *Q. e. d.*

Problema VII.

151. *Datis duobus lateribus* AB & AC *cum angulo intercepto* A, *triangulum conſtruere.* Tab. II. Fig. 31.

Resolutio.

1. Aſſumto AB pro baſi, in A conſtituatur angulus datus (§. 131.).
2. In crus ejus alterum transferatur altera datarum AC.
3. Tandem ducatur recta BC. Erit ABC triangulum deſideratum (§. 150.).

Scholion.

152. *Tyrones latera & angulos datos in numeris aſſumant: quod in aliquibus caſibus ad demonſtrationes empiricas diſtinctius percipiendas proderit.*

COROLLARIUM I.

153. Determinatis adeo duobus lateribus cum angulo intercepto, tota triangula determinantur.

COROLLARIUM II.

154. Quare si in duobus triangulis ACB & acb fiat a=A & ab: ac=AB : AC; triangula eodem modo determinantur (§. 105.), adeoque similia sunt (§. 106.), consequenter etiam c=C & b=B, ab: bc=AB: BC &c. (§. 148.)

THEOREMA XIX.

Tab. II. Fig. 36.

155. *In triangulo æquicruro DFE 1. anguli ad basin* y *&* u *sunt æquales, 2. recta FG, quæ angulum DFE bifariam secat, basin quoque DE, & 3. triangulum ipsum bifariam secat: immo 4. FG ad basin DE perpendicularis.*

DEMONSTRATIO.

Nam o=x, *per hypoth.* DF=FE (§. 75.) & FG=FG (§. 60. *Arith.*). Ergo 1. y=u, 2. DG=GE, 3. △ DFG=△ GFE (§. 150.). Et quia etiam anguli ad G æquales, (*per* §. *cit.*) 4. FG ad DE normalis est (§. 67.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

156. Cum triangulum æquilaterum sit etiam æquicrurum (§. 74. 75.); theorema præsens de æquilatero itidem verum est.

THEO-

THEOREMA XX.

157. *In trangulo æquilatero ABC omnes anguli sunt inter se æquales.* Tab. I. Fig. 12.

DEMONSTRATIO.

Est enim AC=CB (§. 74.). Ergo A=B (§. 155.). Est vero etiam AC=AB (§. 74.). Ergo C=B (§. 155.). Quare A=C (§. 65. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

158. Triangulum itaque æquilaterum est etiam æquiangulum (§. 91.).

THEOREMA XXI.

159. *Si trianguli ABC latus unum AC continuetur in D; erit angulus externus DAB major quolibet interno opposito B vel C.* Tab. V. Fig. 67.

DEMONSTRATIO.

Concipiatur AB bifariam divisa in F ductaque recta CF producenda in G (§. 15.), donec fiat GF=FC. Quoniam GC secat AB in F (§. 41.), erit $z=y$ (§. 132.), consequenter o=x (§. 150.). Sed DAB > o (§. 63. *Arithm.*). Ergo & DAB > x (§. 67. *Arithm.*). Eodem modo ostenditur, esse DAB, aut, quod perinde est (§. 132.), ejus verticalem HAC > ACB. *Q. e. d.*

THEOREMA XXII.

Tab. IV. Fig. 57.

160. *In omni triangulo ABC latus majus AC opponitur majori angulo B; minus AB minori C; & contra.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam AB < AC, *per hypoth.* parti hujus AD æqualis eſt (§. 16. *Arithm.*). Ducatur recta BD (§. 107.): erit BAD triangulum æquicrurum (§. 75.), adeoque $o = x$ (§. 155.). Sed $o >$ C (§. 159.). Ergo $x >$ C (§. 67. *Arithm.*), conſequenter multo magis B > C. *Quod erat unum.*

Sit B > C, *per hypoth.* Si non ſit AC > AB, erit vel AC = AB, vel AC < AB, adeoque in caſu primo B = C (§. 155.), in altero B < C, *per demonſtr.* Sed cum utrumque hypotheſin evertat: abſurdum eſt, conſequenter ſi angulus B > C, etiam AC > AB. *Quod erat alterum.*

THEOREMA XXIII.

Tab. IV. Fig. 57.

161. *In omni triangulo ABD duo latera AD & BD ſimul ſumta ſunt tertio AB majora.*

DEMONSTRATIO.

Producatur AD in C (§. 15. donec fiat BD = DC, adeoque AC = AD + DB (§. 66. *Arithm.*); erit △BDC æquicrurum (§. 75.) & hinc y = C (§. 155.). Cum vero ſit y

<

$< x+y$ (§. 63. *Arithm.*); erit etiam C $< x+y$ (§. 67. *Arithm.*). Quare AC seu AD+DB > AB (§. 160.). *Q. e. d.*

PROBLEMA VIII.

162. *Metiri distantiam duorum locorum A & B ex eodem tertio C accessorum.*

RESOLUTIO.

Tab. II. Fig. 33.

1. In loco C ad arbitrium electo defigatur baculus.
2. Linea AC transferatur ope funis vel catenæ ex C in *a*, ita ut baculus in *a* defigendus sit cum C & A in eadem recta (§. 108.).
3. Eadem ratione ex C in *b* transferatur linea CB.
4. Investigetur longitudo rectæ *a b* (§. 109.). Dico, *ab* esse æqualem distantiæ quæsitæ.

DEMONSTRATIO.

Cum loca A & B punctorum instar in eodem plano sitorum considerentur, eorum distantia est recta AB. Quoniam vero A *a* & B*b* sunt lineæ rectæ *per constr.* & se mutuo secant in C (§. 41.); erit $x=y$ (§. 132.).

Præterea *a*C=CA } *per constr.*
*b*C=CB }

Ergo *b a*=AB (§. 150.). *Q. e. d.*

Aliter.

Tab. II. Fig. 33.

1. Collocato inſtrumento goniometrico in C inveſtigetur quantitas anguli x (§. 129.).
2. Quæratur porro longitudo rectarum AC & BC (§. 109.).
3. Ex datis cruribus AC & CB cum angulo intercepto x conſtruatur juxta ſcalam geometricam modicam triangulum *acb* (§. 151.).
4. Inveniatur in eadem menſura longitudo baſis *ab* (§. 109.).

Iidem numeri indicabunt diſtantiam AB in ea menſura, qua in campo uſus es.

DEMONSTRATIO.

Eſt enim $x=x$ & $ac:cb=AC:CB$, *per conſtr.* conſequenter $cb:ab=CB:AB$ (§. 154.). Ergo iidem numeri, qui reſpondent rectis *cb* & *ab* in menſura modica, etiam rectis CB & AB in majore reſpondent (§. 113. *Arithm.*). *Q. e. d.*

Aliter.

Tab. II. Fig. 34.

1. In menſula geometrica in C horizontaliter collocata aſſumatur punctum *c*, & in eo acicula defigatur, ad quam
2. applicata regula cum dioptris tamdiu huc illucque moveatur, donec per ea proſpicienti punctum B occurrat, ducaturque in hoc regulæ ſitu recta *cb*.
3. Similiter collineatio fiat in punctum A ducaturque *ca*.

4. In

4. Investigetur longitudo rectarum *c* A & *c* B (§. 109.), &
5. Ex mensura modica transferantur lineæ istis proportionales ex *c* in *a* & *b*.
6. Tandem in eadem mensura inveniatur longitudo ipsius *ab* (§. 109.).

Iidem numeri indicabunt distantiam AB in mensura majore, qua in campo usus es.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum proxime præcedente.

PROBLEMA IX.

163. *Super data recta AB triangulum æquilaterum construere.* Tab. I. Fig. 12.

RESOLUTIO.

1. Ex A tanquam centro intervallo ipsius AB describatur arcus *y* &
2. Ex B eodem intervallo alius *x* (§. 110.), qui priorem in C intersecabit.
3. Ducantur rectæ AC & CB; erit ACB triangulum æquilaterum.

DEMONSTRATIO.

Etenim AC=AB & BC=AB (§. 32.). Ergo AC=BC (§. 65. *Arithm.*). Quare triangulum ABC est æquilaterum (§. 74.). Q. e. d.

PROBLEMA X.

164. *Data basi DE & crure DF, quod illa dimidia majus sit, triangulum æquicrurum construere.*

RESOLUTIO.

Tab. I. Fig. 13.

1. Ex uno basis extremo D intervallo cruris dati DF describatur arcus &
2. ex altero extremo E eodem intervallo arcus alius (§. 110.) qui ob DF + EF > DE *per hypoth. & constr.* priorem in F intersecabit.
3. Ducantur rectæ DF & EF (§. 107.).

Dico, DFE esse triangulum æquicrurum.

DEMONSTRATIO.

DF = FE, *per constr.* Ergo DFE est triangulum æquicrurum (§. 75.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

165. Determinatis ergo basi DE & crure DF totum triangulum æquicrurum determinatur.

COROLLARIUM II.

166. Duo igitur triangula æquicrura DFE & *dfe* eodem modo determinantur, si fiat DF : DE = *df* : *de* (§. 105.), consequenter similia (§. 106.), adeoque sibi mutuo æquiangula sunt (§. 148. & 95.).

THEO-

THEOREMA XXIV.

167. *Si in duobus triangulis* ACB & acb *fuerit* AC=ac, AB=ab, BC=bc; *etiam* A=a, B=b, C=c, *totaque triangula æqualia ſunt & ſimilia.*

Tab. II. Fig. 31.

DEMONSTRATIO.

Ex centro A radio AC deſcriptus concipiatur arcus *y* & ex centro B radio BC alius *x* (§. 110.). Concipiamus porro △*acb* ita poni ſupra △ ACB, ut punctum *a* ſuper A & recta *ab* ſuper AB cadat. Quoniam *ab*=AB, *per hypoth.* punctum *b* ſuper B cadet (§. 144.). Et quia *ac*=AC & *bc*=BC, *per hypoth.* recta *ac* in arcu *y* & *bc* in arcu *x* terminabitur (§. 146.), conſequenter quia hi arcus in unico tantum puncto ſe interſecant, punctum *c* ſuper C cadet & rectæ *ac*, *bc* rectis AC, BC congruent (§. 145.). Quare *a*= A, *b*=B, *c*=C (§. 142.); cumque △*acb* alteri ACB congruat (§. 2.), △ acb=& ∽ △ ACB (§. 136.). *Q. e. d.*

PROBLEMA XI.

168. *Datis tribus lateribus AB, BC, CA, quorum duo ſimul ſumta AC & BC tertio AB majora ſunt, triangulum conſtruere.*

Tab. I. Fig. 14.

RESOLUTIO.

1. Aſſumta AB pro baſi, ex A intervallo ipſius AC deſcribatur arcus *y* &

2. Ex

2. ex B intervallo ipſius BC arcus alius x (§. 110.), qui ob AC+BC > AB *per hypoth.* priorem in C ſecabit.
3. Ducantur rectæ AC & BC (§. 107.). Ita factum eſt, quod petebatur.

Corollarium I.

169. Cum ex tribus datis rectis nonniſi unicum triangulum conſtrui poſſit (§. 167.); determinatis lateribus, totum triangulum determinatur.

Corollarium II.

170. Quare ſi in duobus triangulis ACB & acb fiat AC : AB = ac : ab, AC : BC = ac : bc; triangula eodem modo determinantur (§. 105.); conſequenter ſimilia (§. 106.), adeoque ſibi mutuo æquiangula ſunt (§. 148. 95.).

Problema XII.

Tab. II. Fig. 37.

171. *Angulo dato DAE æqualem* b a c *conſtituere.*

Resolutio.

I. In charta
1. Ex A intervallo AC deſcribatur arcus BC; erit AB=AC (§. 32.).
2. Ducatur recta ac = AC & ex a intervallo ipſius AB deſcribatur arcus x, item
3. Ex c intervallo ipſius CB alius y, qui ob AB+BC > AC, ſeu ab+bc > ac (§. 161.), priorem in b interſecabit
4. Ducatur recta ab (§. 107).

Di-

Dico esse $a = A$.

II. In solo

1. Desigatur baculus in C cum A & E, itemque alius in B cum A & D in eadem recta (§. 108.).
2. In a & c desigantur baculi, ea lege, ut sit $ac = AC$.
3. Ad eos funis vel catena ita applicetur, ut pars ipsius $ab = AB$ & altera $cb = CB$ fiat.
4. In b desigatur baculus.

Dico esse $bac = BAC$.

Interdum etiam in solo uti licet modo priore.

DEMONSTRATIO.

In utroque casu $ac = AC$, $ab = AB$, $cb = CB$, *per construct.* Ergo $bac = BAC$ (§. 167.). *Q. e. d.*

PROBLEMA XIII.

172. *Angulum datum HIK in duas partes æquales dividere.* Tab II. Fig. 38.

RESOLUTIO.

1. Ex centro I ducatur radio quocunque arcus LM (§. 110.).
2. Ex L & M intervallo dimidia LM majore ducantur arcus se mutuo secantes in N.
3. Ducatur recta IN (§. 107.).

Dico esse $HIN = NIK$.

DEMONSTRATIO.

Eſt enim IL=IM (§. 32.), LN=MN *per conſtr.* IN=IN. Ergo HIN=NIK (§. 167.). *Q. e. d.*

PROBLEMA XIV.

Tab. II. Fig. 30.

173. *Lineam rectam AB in duas partes æquales dividere & in medio ejus perpendicularem erigere.*

RESOLUTIO.

I. In charta.

1. Ex A & B intervallo dimidia AB majore ducantur arcus ſe mutuo in C ſecantes.
2. Fiat ſimilis interſectio infra lineam in D
3. Ducatur recta DC (§. 107.).

Dico eſſe AE=EB.

DEMONSTRATIO.

Δ ACB eſt æquicrurum (§. 164.). & recta CED dividit angulum ACB bifariam (§. 172.). Ergo eadem recta CD dividit AB bifariam in E & ad AB in E perpendicularis (§. 155.). *Q. e. d.*

Aliter.

Tab. II. Fig. 39.

1. Ponatur circinus in A & eo usque aperiatur, donec medium lineæ attingere videatur in D.
2. Intervallum AD transferatur ex B in E: quo facto

3. Non

3. Non difficile erit determinatu punctum medium F.

II. In solo.

1. Filum longitudini lineæ AB æquale complicetur, ut punctum medium inveniatur.
2. Hoc acicula infixa notetur & filum lineæ datæ rursus coextendatur.
3. Ad punctum medium baculus in terra defigatur.

Sic factum est, quod petebatur.

SCHOLION.

174. *Duo modi posteriores equidem secandi rectam bifariam mechanici dicuntur, non geometrici, quia tentando res peragitur: illorum tamen in praxi egregius est usus.*

PROBLEMA XV.

175. *Ex puncto G in recta ML dato perpendicularem GI excitare.*

RESOLUTIO.

I. In charta.

1. Posito circino in G arbitrario intervallo resecentur utrinque partes æquales GK & GH. Tab. II. Fig. 32.
2. Ex punctis K & H intervallo dimidia KH majore fiat intersectio in I.
3. Ducatur recta GI (§. 107.), quæ erit ad ML perpendicularis.

DEMONSTRATIO.

Nam KG=GH & KI=IH, *per con-struct.* IG=IG. Ergo anguli ad G ſunt æquales (§. 167.), conſequenter IG ad ML perpendicularis (§. 67.). *Q. e. d.*

RESOLUTIO alia.

Tab. II. Fig. 35.

1. Normæ, hoc eſt, inſtrumenti ex duabus regulis ad angulum rectum junctis compoſiti crus unum ita applicetur ad rectam ML, ut anguli vertex ſupra punctum datum G cadat.
2. Ducatur juxta crus alterum recta IG (§. 107.), quæ erit ad ML perpendicularis.

DEMONSTRATIO.

Angulus normæ eſt rectus, *per hy-poth.* ſed ipſi æqualis eſt IGL (§. 142.): ergo IGL eſt itidem rectus (§. 122.), adeoque IG ad ML perpendicularis (§. 66.).

II. In ſolo.

Norma utimur majore. Aut

Tab. II. Fig. 32.

1. Filum KIH in duas partes æquales in I diviſum ex punctis KIH extenditur &
2. In I baculus defigitur, tandemque
3. KH bifariam ſecatur in G (§. 173.).

Dico eſſe GI ad KH perpendicularem.

DEMONSTRATIO.

Cum KI=HI, & KG=GH, *per con-struct.* GI=GI; anguli ad G deinceps poſiti

positi sunt æquales (§. 167.), consequenter IG ad ML normalis (§. 67.). *Q. e. d.*

THEOREMA XXV.

Tab. III. Fig. 40.

176. *Si duopuncta H & Q alicujus rectæ HI a duobus punctis K & L alterius rectæ MN utrinque æqualiter distent; erit HI ad MN perpendicularis.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam puncta H & Q utrinque a punctis K & L æqualiter distant, *per hypoth.* HK=HL & QK=QL, Est vero etiam QH=QH. Ergo $o=x$ (§. 167), consequenter cum HI=HI, anguli ad I æquales (§. 150.), adeoque HI ad MN perpendicularis (§. 67.). *Q. e. d.*

PROBLEMA XVI.

Tab. III. Fig. 40.

177. *A dato puncto H ad rectam MN perpendicularem HI demittere.*

RESOLUTIO.

I. In charta.

1. Posito circino in H intervallo arbitrario, eodem tamen, intersecetur MN in K & L.
2. Ex K & L fiat intersectio in Q.
3. Ducatur per Q recta HI (§. 107.).

Hæc erit ad MN perpendicularis.

DEMONSTRATIO.

Quoniam KH=LH & KQ=LQ *per construct.* puncta H & Q a punctis K & L

utrinque æqualiter distant. Ergo HI ad MN perpendicularis (§. 176.). *Q. e. d.*

Aliter.

Tab. II. Fig. 35.

1. Applicetur norma ad lineam datam ML; ita ut crus unum eandem stringat, alterum vero punctum datum I attingat.
2. Ducatur recta GI (§. 107.), quæ ad ML perpendicularis erit.

DEMONSTRATIO.

Eadem est, quæ in casu simili problematis (§. 175.).

II. In solo.

Tab. III. Fig. 40.

Aut utimur norma majore, ut in probl. (§. 115.) aut

1. Fune ex H extenso designantur puncta K & L & in iis baculi defiguntur (§. 108.).
2. Intervallum KL dividitur bifariam in I (§. 173.).

Dico, baculos in H & I defixos perpendicularem HI designare.

DEMONSTRATIO.

Quoniam KH=LH & KI=LI, *per construct.* HI=HI; anguli ad I sunt æquales (§. 167.), adeoque HI ad MN perpendicularis (§. 67.). *Q. e. d.*

THEOREMA XXVI.

Tab. VIII. Fig. 110.

178. *In omni triangulo rectangulo HIK angulus nonnisi* x *rectus est; reliqui H, K sunt acuti.*

DE-

DEMONSTRATIO.

Angulus y rectus est (§. 67.). Sed $y > m$, item $>$ H (§. 159.). Ergo K & H sunt recto minores, adeoque acuti (§. 54.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

179. Angulorum igitur maximus in triangulo rectangulo est rectus.

COROLLARIUM II.

180. In triangulo rectangulo latus maximum est hypothenusa (§. 81. 160.).

THEOREMA XXVII.

Tab. III. Fig. 41.

181. *Si HI fuerit parallela & BA perpendicularis ad KL; erit eadem AB etiam perpendicularis ad HI.*

DEMONSTRATIO.

Fiat EB=BD & erigantur ex E & D perpendiculares EG & DC (§. 175.); erit GE=CD (§. 69.) & E=D (§. 66. 122.), consequenter BG=BC & $y=u$ (§. 150.). Sed quoniam AB perpendicularis ad KL, *per hypoth.* ideo $u+x=o+y$ (§. 67). Ergo & $x=o$ (§. 69. *Arithm.*) Quare cum porro sit AB=AB; erit & $m=n$ (§. 150.), adeoque BA ad HI perpendicularis (§. 67.). *Q. e. d.*

THEOREMA XXVIII.

Tab. III. Fig. 43.

182. *Si duas parallelas* AB *&* CD *secet transversa* EF *in* G&H; *erunt* 1 *anguli alterni* y *&* u *æquales*; 2. *angulus externus* x *æquatur interno opposito* u; 3 *duo interni oppositi* o *&* u *sunt æquales duobus rectis.*

DEMONSTRATIO.

Si recta EF secet parallelas AB & CD ad angulos rectos, omnia manifesta sunt per theorema (§. 181.). Si vero oblique secet; ducantur perpendiculares GI & HK (§. 175.). Producatur GI in M & HK in L (§. 15.), donec fiat IM=GI & KL=HK.

1. Quoniam GI perpendicularis ad CD *per construct.* erunt anguli ad I æquales (§. 67.). Porro GI=IM *per constr.* & HI =IH. Ergo GH=HM & $u=z$ (§. 150.). Eodem modo ostenditur esse HG=GL & y=t. Quamobrem & GL=HM (§.65. *Arithm.*). Est vero etiam HK=GI (§. 69.) & hinc HK+KL=GI+IM(§. 66. *Arithm.*), hoc est, HL=GM (§. 64. *Arithm.*) & GH =GH: Unde $t+y=u+z$ (§. 167.). Cum itaque $t=y$ & $u=z$ *per demonstrata*: erit $y+y=u+u$ (§. 12. *Arithm.*), hoc est, $2y=2u$, consequenter $y=u$ (§. 72. *Arithm.*) *Quod erat primum.*

2.

2. $x=y$ (§. 132.) & $u=y$ (*per n.* 1). Ergo $x=u$ (§. 65. *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

3. $x+o=180°$ (§. 125.). Sed $x=u$ (*per num.* 2.). Ergo $u+o=180°$ (§. 12. *Arithm.*). *Quod erat tertium.*

PROBLEMA XVII.

183. *Datis duobus lateribus* AB & BC *cum angulo* A *uni eorum* BC *opposito, triangulum* ABC *construere.*

RESOLUTIO.

Tab. II. Fig. 31.

1. Ducta recta AB, in puncto A excitetur angulus dato æqualis (§. 171.), factaque AB uni datorum laterum æquali.

2. Ex B intervallo alterius lateris dati BC crus anguli AC intersecetur in C.

3. Puncta B & C connectantur recta (§. 107.). Sic factum est, quod petebatur.

4. Quodsi BC $<$ BA, aut bis secabit crus AC, aut idem tangit, adeoque in casu posteriore angulus ad C rectus est (§. 233.), in priore constare debet, utrum angulus ad C sit acutus, an obtusus.

COROLLARIUM I.

184. Cum ex duobus lateribus atque angulo uni eorum oppoſito triangulum conſtrui poſſit; iis datis reliqui anguli & crus reliquum una determinantur. Quare ſi in duobus triangulis ejusdem ſpeciei ABC & *abc* fuerit AB $=ab$, BC$=bc$ & A$=a$; erit etiam AC$=ac$, B$=b$, C$=c$ & $\triangle$ ABC$=\triangle$ *abc*.

COROLLARIUM II.

185. Quodſi in duobus triangulis ejusdem ſpeciei, veluti acutangulis, ABC & *abc* fuerit A$=a$ & AB:BC$=ab:bc$, triangula eodem determinantur (§. 105.), adeoque ſimilia ſunt (§. 106.), conſequenter etiam B$=b$, C$=c$, BC:CA$=bc:ca$ & CA:AB$=ca:ab$ (§. 148.).

modo

THEOREMA XXIX.

Tab. III. Fig. 42.

186. *Si trianguli cujuscunque* ACB *latus unum* BC *continuetur in* D; *erit angulus externus* DCA *æqualis duobus internis oppoſitis* y *&* z *ſimul ſumtis.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur CE baſi AB parallela, erit $x=y$ & $o=z$ (§. 182.), conſequenter $x+o=y+z$ (§. 66. *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEO-

THEOREMA XXX.

187. *In quovis triangulo* ACB *tres anguli* y, u, z *junctim sumti sunt æquales duobus rectis seu* 180°. Tab. III. Fig. 42.

DEMONSTRATIO.

Nam $o + x = y + z$ (§. 186.). Ergo $o + x + u = y + z + u$ (§. 66. *Arithm.*). Sed $o + x + u = 180°$ (§. 124.): ergo $y + z + u = 180°$ (§. 65. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

188. In triangulo igitur rectangulo MKL duo anguli obliqui M & L junctim sumti efficiunt rectum seu 90°, adeoque semirecti sunt, si fuerit æquicrurum (§. 155.). Tab. I. Fig. 15.

COROLLARIUM II.

189. Si unus angulus est obtusus, duo reliqui simul sumti sunt recto minores (§. 54.).

COROLLARIUM III.

190. In triangulo æquilatero ACB quilibet angulus est 60°, nimirum 180 : 3 (§. 157.). Tab. I. Fig. 12.

COROLLARIUM IV.

191. Cum itaque in triangulo rectangulo necessario angulus unus sit rectus (§. 77.); triangulum rectangulum æquilaterum esse nequit.

COROLLARIUM V.

192. Si unus trianguli angulus ex 180° ſubtrahitur, ſumma duorum reliquorum relinquitur; & ſi ſumma duorum ex 180° aufertur, reſiduus fit tertius.

COROLLARIUM VI.

193. Si duo anguli unius trianguli æquentur duobus alterius ſive ſigillatim, ſive junctim; etiam tertius unius æqualis eſt tertio alterius (§. 69. *Arithm.*).

COROLLARIUM VII.

194. Quoniam in triangulo æquicruro DFE anguli ad baſin *y* & *u* æquales ſunt (§. 155.), ſi angulus ad verticem F ſubtrahitur a 180° & reſiduum biſecatur, unus angulorum æqualium *y* vel *u* prodit. Similiter ſi duplum anguli unius ad baſin *y* a 180° ſubtrahitur, angulus ad verticem F relinquitur.

Tab. I. Fig. 13.

PROBLEMA XVIII.

Tab. III. Fig. 44.

195. *In extremitate F lineæ FG perpendicularem FH excitare.*

RESOLUTIO.

1. Super FG conſtruatur △ æquilaterum FIG (§. 163.).
2. Producatur GI in H (§. 107.), donec fiat HI=GI.
3. Ducatur recta HF (§. 107.): quæ erit ad FG perpendicularis.

DE-

DEMONSTRATIO.

Quoniam △ FIG est æquilaterum, *per constr.* $o=60°$ & $u=60°$ (§. 190.). Ergo $y=120°$ (§. 186.), consequenter ob FI=HI *per constr.* $x=30°$ (§. 194.) Cum adeo $x+o=90°$; angulus ad F rectus (§. 121.) & HF ad FG perpendicularis est (§. 66.). *Q. e. d.*

THEOREMA XXXI.

Tab. II. Fig. 31.

196. *Si in duobus triangulis* ABC & abc *fuerit* AB=ab, A=a & B=b; *erit etiam* AC=ac, BC=bc, C=c & △ ACB=& ∽ △ acb.

DEMONSTRATIO.

Concipiamus △ *abc* poni supra alterum ABC, ita ut punctum *a* super A & recta *ab* super AB cadat. Quoniam *ab*=AB, *a*=A & *b*=B, *per hypoth.* punctum *b* super B (§. 144.), recta *a c* super AC & *bc* super BC (§. 141.), consequenter *c* super C (§. 146.) cadit. Cum adeo △ *a b c* alteri ABC congruat (§. 2.); erit *ac*=AC, *bc*=BC, c=C (§. 149.) & △ *a b c*=& ∽ △ ABC (§. 136.) Q. e. d.

COROLLARIUM.

197. Si in duobus triangulis ACB & *acb* fuerit A=*a*, B=*b* & BC=*bc*; erit etiam C=*c* (§. 193.), consequenter AC=*ac*, AB =*ab* & △ ACB=& ∽ △ *acb* (§. 196.).

THEOREMA XXXII.

Tab. II. Fig. 36.

198. *Si in triangulo DFE anguli ad basin y & u æquales; triangulum est æquicrurum.*

DEMONSTRATIO.

Secet FG angulum F bifariam (§. 172.); erit DF=FE(§. 197.). Est ergo △ DFE æquicrurum (§. 75.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

199. Si ergo tres anguli fuerint æquales; æquilaterum est (§. 74.).

THEOREMA XXXII.

Tab. III. Fig. 43.

200. *Si duas lineas AB & CD secet transversa EF in G & H, ita ut vel* 1. y=u; *vel* 2. x=u; *vel* 3. o+u=180°; *erunt lineæ istæ inter se parallelæ.*

DEMONSTRATIO.

1. Demittantur ex H & G perpendiculares HK & GI (§. 177.); erit K=I (§. 66. 122.). Est vero & *y=u*, *per hypoth.* & HG=HG. Quare HK=GI (§. 197.), consequenter cum HK & GI sint distantiæ linearum AB & CD; lineæ AB & CD sunt inter se parallelæ (§. 69.). *Quod erat primum.*

2. *x=u per hypoth. x=y* (§. 132.). Ergo y=u (§. 65. *Arithm.*), consequenter

AB

AB & CD sunt inter se parallelæ, *per num.* 1. *Quod erat secundum.*

3. $o + u = 180°$, *per hypoth.* Sed $o + x = 180°$ (§. 124.). Ergo $u = x$ (§. 65. 69. *Arithm.*), consequenter A B & CD sunt inter se parallelæ, *per num.* 2. *Quod erat tertium.*

COROLLARIUM.

201. Si ergo $o + u < 180°$, lineæ GB & HD versus eandem plagam convergent; adeoque productæ alicubi se mutuo secabunt.

PROBLEMA XIX.

202. *Per datum punctum V parallelam rectæ RS ducere.*

Tab. III. Fig. 47.

RESOLUTIO.

I. In charta

1. Ex V demittatur perpendicularis VK (§. 177.).
2. Ex puncto quolibet T erigitur perpendicularis TA = KV (§. 175.).
3. Per V & A ducatur recta MN, quæ erit ipsi RS parallela (§. 69.).

Aliter.

1. Per datum punctum V ducatur utcunque recta RG.
2. In V fiat $o = x$ (§. 671.).

Erit VN seu MN parallela ipsi RS (§. 200.).

Ali-

Aliter.

Tab. III. Fig. * Ex modo præcedente enatus est sequens.

1. Triangulum rectangulum AVN ex ligno ebenino aut alio Indico paratum ita applicetur ad rectam RS, ut basis ejus VN parti ipsius congruat.
2. Hypothenusæ ejusdem Trianguli AV applicetur regula RG, quæ altera manu in hoc situ immota detineatur.
3. Triangulum AVN juxta ductum regulæ promoveatur, donec basis punctum V attingat.

Erit enim in quovis situ basis VN ob $y=x$ ipsi RS parallela (§. 200.). *Q. e. d.*

Tab. III. Fig. 48. II. In campo

Commode utimur modo primo antecedentium, vel

1. In puncto quolibet K defigatur baculus cum aliis in R & S defixis in eadem recta (§. 108.),
2. Ad V fiat $o=x$ (§. 171.).

Erit MV, quæ facile produci potest in N (§. 108.), ipsi RS parallela (§. 200.).

PROBLEMA XX.

Tab. I. Fig. 14. 203. *Datis recta AB & angulis adjacentibus, A & B qui junctim sumti duobus rectis minores sunt, triangulum ABC describere.*

RESOLUTIO.

1. Ad datam rectam AB excitentur anguli dati A & B (§. 131.).

2. Crura

2. Crura AC & BC continuentur, donec sibi mutuo occurrant in C (§. 201.). ABC triangulum erit desideratum.

COROLLARIUM I.

204. Data ergo linea una datisque duobus angulis triangulum determinatur.

COROLLARIUM II.

Tab. II. Fig. 31.

205. Quare si in duobus triangulis fiat $A=a$ & $B=b$: triangula eodem modo determinantur (§. 105.), adeoque similia sunt (§. 106.).

COROLLARIUM III.

206. Si in duobus triangulis fuerit $A=a$ & $B=b$: consequenter in rectangulis unus obliquorum in uno æqualis uni in altero (§. 122.); erit etiam $C=c$ (§. 193.), hoc est, $\triangle\triangle$ ACB & acb sibi mutuo æquiangula (§. 95.). Quare $\triangle\triangle$ sibi mutuo æquiangula similia sunt (§. 205.) & hinc latera homologa seu æqualibus angulis opposita proportionalia habent (§. 148.).

THEOREMA XXXIV.

Tab. III. Fig. 45.

207. *Si in triangulo ABC recta DE basi AC parallela ducatur, segmenta crurum cruribus proportionalia sunt, hoc est, $BA : BC = BD : BE = AD : EC$ & $BA : AC = BD : DE$, atque $\triangle BDE \backsim \triangle BAC$.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam DE parallela ipsi AC *per hypoth.* erit $x=y$ & $u=o$ (§. 182.) adeoque △ BDE ∽ △ BAC & BA: BC=BD: BE & BA: AC=BD: DE (§. 206.). Cum etiam sit BA—BD: BC—BE=BD: BE (§. 137. *Arith.*). præterea BA—BD=AD & BC—BE=EC, erit AD: EC=BD: BE (§. 118. *Arith.*) seu AD: BD=EC: BE (§. 122. *Arith.*) *Q. e. d.*

THEOREMA XXXV.

Tab. III. Fig. 49. 208. *Recta FH angulum GFE bifariam secans basin GE cruribus adjacentibus EF & GF proportionaliter secat.*

DEMONSTRATIO.

Producatur EF in I (§. 15.), donec fiat FI=GF; erit $o+x=y+u$ (§. 186.). Sed $o=x$ *per hypoth.* & $y=u$ (§. 155.), adeoque $2y=2o$ (§. 12. *Arithm.*). Ergo $o=y$ (§. 72. *Arithm.*); consequenter HF ipsi GI parallela (§. 200.). Quare EF: EH=FI: GH (§. 207.) =GF: GH (§. 118. *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA XXI.

Tab. III. Fig. 50. 209. *Datis tribus lineis* AB, AC & BD *invenire quartam proportionalem.*

RESOLUTIO.

1. Ducatur angulus non nimis acutus FAG pro arbitrio.
2. Ex A in B transferatur linearum datarum prima; ex A in C altera; ex B in D tertia.
3. Ducatur recta BC (§. 107.).
4. In D constituatur angulus ipsi ABC æqualis (§. 171.).

Dico, esse AB: AC=BD: CE.

DEMONSTRATIO.

Quoniam *o=x per constr.* erit BC ipsi DE parallela (§. 200.). Quamobrem AB: AC=BD: CE (§. 207.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

210. Quodsi, duabus lineis AB & AC datis, tertia inveniri debet; etiam BD ipsi AC æqualis fieri, hoc est, AC bis poni debet. Erit nimirum AB: AC=AC: CE.

PROBLEMA XXII.

211. *Datam rectam AB in quotcunque partes æquales dividere.* Tab. III. Fig. 52.

RESOLUTIO.

1. Ex recta CD pro arbitrio assumta resecentur tot partes æquales, in quot data AB dividenda, e. gr. 5.
2. Super harum partium intervallo construatur triangulum æquilaterum CED (§. 163.).

3. Ex

3. Ex E in a transferatur recta AB itidemque ex E in b.

4. Ducatur recta ab: ducantur itidem aliæ ex E in 1. 2. 3. &c.

Dico esse ab= AB, a 1 = $\frac{1}{5}$ AB, a 2 = $\frac{2}{5}$ AB &c.

DEMONSTRATIO.

Quoniam E a=E b & EC=ED, *per constru*. erit E a: E b=EC: ED (§. 118. 122. *Arithm.*). Quare cum angulus E utrique triangulo ECD & Eab communis sit: erit EC: CD=Ea : ab & o=x (§. 154.). Sed EC=CD, *per constru*. Ergo E a=ab (§. 109. *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Quoniam o=x, *per demonstr.* erit a1 parallela ipsi C 1 (§. 200.), consequenter EC: C 1=E a: 1 (§. 207.), hoc est; ob EC=CD, *per constru.* & E a =ab *per demonstr.* CD: C 1 = ab: a 1 (§. 118. *Arithm.*). Sed C 1=$\frac{1}{5}$ CD *per constru*. Ergo a 1=$\frac{1}{5}$ ab (§. 109. *Arithm.*) *Quod erat alterum.*

Eodem modo ostenditur, esse a2=$\frac{2}{5}$ AB consequenter 1. 2=$\frac{1}{5}$ AB, & ita porro.

COROLLARIUM.

Tab. III. Fig. 51. 212. Quodsi ergo CD fuerit utcunque divisa in 1 & 2; eodem modo recta ab secabitur in eadem ratione. Est nempe CD: C 1 =ab: a 1, CD: C2 = ab: a2 &c. (§. 211.).

PRO-

PROBLEMA XXIII.

213. *Scalam Geometricam construere.* Tab. III. Fig. 53.

RESOLUTIO.

1. Ducatur recta AF. in eam transferantur partes 10 æquales B 1, 1. 2, 2. 3, 3. 4 &c. intervallum vero 10 partium AB totidem ex B in E, ex E in F &c. quoties libuerit.
2. In A excitetur perpendicularis AC, arbitrariæ longitudinis, in partes 10 æquales divisa (§. 195.).
3. Per puncta divisionum 1. 2. 3. 4. 5 &c. agantur parallelæ cum AF (§. 202.).
4. In ultimam CD transferantur partes 10 partibus ipsius AB æquales.
5. Tandem puncta 10. & 9, 9 & 8, 8 & 7 &c. lineis tranversis connectantur (§. 107.).

Dico si AB fuerit decempeda, fore B 1, 1. 2, 2. 3, 3. 4 &c. pedes, 9. 9 digitum unum, 8. 8 digitos duos, 7. 7 tres, 6. 6 quatuor &c.

DEMONSTRATIO.

B 1 = 1. 2 = 2. 3 &c. = $\frac{1}{10}$ AB *per construct.* Sed pes est decempedæ pars decima (§. 18.). Ergo cum AB sit decempeda, *per hypoth.* erunt B. 1, 1. 2, 2. 3 &c. pedes. *Quod erat unum.*

Porro quia 9 9. est parallela ipsi A 9, *per construct.* C. 9 : CA = 9. 9 : A 9 (§. 207.).

Sed C 9 = $\frac{1}{10}$ CA, *per constr.* Ergo 9. 9 = $\frac{1}{10}$ A 9 (§. 109. *Arithm.*). Quare cum A 9 sit pes, *per demonstr.* erit 9. 9 digitus (§. 18.). Eodem modo ostenditur esse 8. 8 duos, 7. 7 tres &c. digitos. *Quod erat alterum.*

SCHOLION.

214. *Quemadmodum hic linea exigua A 9 in 10 partes æquales dividitur; ita eadem in quotcunque alias eodem artificio dividi potest.*

COROLLARIUM

215. Quodsi ergo circini crus unum collocatur in I & alterum in K, erit intervallum IK = 1° 4′ 5″ & ita porro.

PROBLEMA XXIV.

Tab. IV. Fig. 54.

216. *Invenire distantiam duorum locorum AB, quorum unus B tantum accedi potest.*

RESOLUTIO.

1. Baculo ad arbitrium in E defixo, recta BE transferatur ex E in C, ita ut baculus in C defixus sit cum E & B in eadem recta (§. 108.).
2. In C constituatur angulus DCE ipsi B æqualis (§. 171.).
3. Tandem ex C progrediendum versus D, donec baculus in D defixus sit cum F & C, itemque cum E & A in eadem recta (§. 108.).

Dico esse DC = BA.

DE-

DEMONSTRATIO.

Nam BE=EC, $o=x$, *per construct.* & $y=u$ (§.132). Ergo AB=DC (§.196.). *Q. e. d.*

Aliter.

Tab. IV. Fig. 56.

1. Mensula geometrica in C collocata per dioptras collineetur in A & B, ducanturque rectæ *ac* & *cb*.
2. Quæratur distantia stationis a loco accesso AC (§. 109.) &
3. Ex scala geometrica in *ac* transferatur (§. 213.).
4. Translocetur mensula in A, ita ut punctum *a* ipsi A immineat & per dioptras regulæ ad *ac* applicatæ baculus in prima statione C defixus conspiciatur.
5. Mox collineatio in B fiat, ducaturque *a b*.
6. Denique in scala geometrica capiatur intervallum ipsius *ab* (§. 213.).

Ita distantia quæsita AB innotescet.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $c=C$ & $a=A$ (*per construct.* & (§. 142.), erit $ac : ab = AC : AB$ (§. 206.), hoc est, iidem numeri rationes $ac : ab$ & $AC : AB$ indigitant (§. 108. *Arithm.*). *Q. e. d.*

Aliter.

Tab. IV. Fig. 56.

1. Baculo in C defixo investigetur quantitas angulorum A & C (§. 129.), itemque longitudo ipsius AC (§. 109.).
2. Ope instrumenti transportatorii & scalæ geometricæ construatur triangulum *acb* (§. 203.).
3. Ad scalam geometricam applicetur recta *ab* (213.).

Ita distantia AB innotescet.

DEMONSTRATIO.

Eadem est, quæ proxime præcedens.

PROBLEMA XXV.

217. *Metiri distantiam duorum locorum inaccessorum* AB.

RESOLUTIO.

Tab. IV. Fig. 59.

1. Duabus stationibus in C & D electis in prima C collocetur mensula & per dioptras collineetur in D, B & A, ducanturque juxta regulæ, cui affiguntur, ductum rectæ *cd*, *cb*, *ca*.
2. Quæratur distantia stationum CD (§. 109.) &
3. Ex scala geometrica transferatur in *cd* (§. 215.).
4. Baculo in C defixo mensula collocetur in D, ea lege, ut punctum *d* ipsi D, hoc est, puncto, in quo defigebatur ante baculus, immineat & per

diop-

dioptras regulæ ad *cd* applicatæ reſpicienti baculus in C occurrat.

5. Hinc porro collineatio fiat in A & B ducanturque rectæ *da* & *db*.
6. Tandem diſtantia punctorum *a* & *b* inveſtigetur in ſcala geometrica (§. 215).

Dico eſſe *cd*: *ab*=CD: AB.

DEMONSTRATIO.

Eſt enim *cdb*=CDB & *bcd*=BCD (*per conſtruct.*. & §. 142.). Ergo *dc*: *cb*=DC: CB (§. 206.). Similiter cum ſit *acd* =ACD & *adc*= ADC (*per conſtruct.* & §. 142.), erit *dc*: *ac*= DC: AC, adeoque *bc*: *ac*=BC: AC (§. 139. *Arith*), conſequenter ob *acb*=ACB (*per conſtruct.* & §. 142.) *ac*: *ab*=AC: AB (§. 154.) & ob *dc*: *ac*=DC: AC (*per demonſtr.*) *dc*: *ab*=DC: AB (§. 140. *Arith.*). Q. e. d.

Aliter.

1. Electis duabus ſtationibus C & D inveſtigetur quantitas angulorum *y* & *x*, item, *z* & *w* (§. 129.). quorum ſummæ dant angulos C & D (§. 64. *Arithm.*). Tab. IV. Fig. 60.
2. Quæratur porro diſtantia ſtationum CD (§. 109.) &
3. Ducatur in charta linea recta in quam ex ſcala geometrica transferatur recta *cd* ipſi CD reſpondens (§. 215.).

4. Super ea ope angulorum x & D conſtruatur triangulum *bcd* & ope angulorum z & C alterum *acd* (§. 203.).
5. Tandem in ſcala geometrica inveſtigetur diſtantia punctorum *a* & *b*. (§. 215.).

Dico eſſe $ab : cd = AB : CD$.

DEMONSTRATIO.

Eadem eſt cum proxime præcedente.

SCHOLION I.

218. *Lévi attentione patet, non abſimili methodo ex duabus ſtationibus reperiri diſtantias plurium locorum.*

SCHOLION. II.

Tab. IV. Fig. 58.

219. *Nec minus manifeſtum eſt menſulæ ſitum in iſtiusmodi operationibus horizontalem eſſe debere; id quod obtinetur ope perpendiculi Q.*

PROBLEMA XXVI.

220. *Altitudinem acceſſam* AB *metri*

RESOLUTIO.

Tab. V. Fig. 61.

1. In diſtantia plurium e. gr. 30, 40 & amplius pedum defigatur perpendiculariter baculus DE & aliquo hinc intervallo in C alius minor, ita, ut cum oculo in F conſtituto *E* & B ſint in eadem recta.
2. Inveſtigetur diſtantia baculorum GF & baculi minoris ab altitudine quæſita HF.

HF, itemque differentia altitudinum baculorum GE (§. 109.).

3. Quæratur ad GF, GE & HF quarta proportionalis BH (§. 215. *Arithm.*).

4. Huic addatur altitudo baculi minoris FC vel pars AH.

Dico summam esse altitudinem AB.]

E. gr. Sit HF=48′, GF=20′, GE =16′, FC=5′.

20 : 16 = 48	5) 192	(38 $\frac{2}{5}$ = BH
5 4 4	15	5 = FC
192	42	43 $\frac{2}{5}$ = AB
	40	
	2	

DEMONSTRATIO.

Cum HF ipsi AC parallela supponatur; sintque BA (§. 101.) & ED *per constr.* ad AC perpendiculares; erunt eædem perpendiculares ad HF (§. 181.), adeo que GE & BH parallelæ (§. 200.), consequenter GF : GE = HF : AB (§. 207.). *Quod erat unum.*

Porro cum HA & FC sint perpendiculares inter easdem parallelas HF & AC (*per constr.* & §. 101.); erit FC=HA (§. 69.). Quare BH+FC=BH+HA (§. 66. *Arithm.*)=BA (§. 64. *Arithm.*). *Q. e. d.*

Aliter.

1. Mensula in D verticaliter erigatur, ita, ut latus ipsius FE sit horizonti

Tab. V. Fig. 63.

Tab. IV. Fig. 58.

parallelum: id quod obtinetur ope perpendiculi Q.

2. Ducatur recta *ef* lateri menſulæ parallela, & regula cum dioptris ad hanc applicata vertatur menſula, donec collineatio in altitudinem quæſitam fiat.
3. Circa punctum *e* vertatur regula, donec oculo per dioptras tranſpicienti apex altitudinis A occurrat, ducaturque recta *eb*.
4. Quæratur diſtantia ſtationis ab altitudine *e* C (§. 109.) &
5. Ex ſcala geometrica minore transferatur ex *e* in *c* (§. 215.) &
6. Ex *c* erigatur perpendiculum *bc* (§. 175.), quod
7. Ad ſcalam geometricam applicatum (§. 215.) partem altitudinis AC manifeſtat.
8. Addatur altitudo BC.

Dico, ſummam eſſe altitudinem AB.

DEMONSTRATIO.

Quoniam AC perpendicularis ad BD (§. 101.) & Ce ipſi BD parallela *per conſtr.* erit eadem AC perpendicularis ad CE (§. 181.). Sed ad eandem etiam *bc* perpendicularis *per conſtr.* Ergo *bc* ipſi AC parallela (§. 200.), conſequenter *ec*: *cb*=EC: CA (§. 207.).

Aliter.

1. Inveſtigetur quantitas anguli *e* (§. 129.) & diſtantia ſtationis *e* C (§. 109.).

2. Su-

2. Super *e c* in ſcala Geometrica minore aſſumta (§. 215.). conſtruatur triangulum ad *c* rectangulum *cbe* (§. 203.).
3. Reliqua fiant ut ante.

DEMONSTRATIO.

Eſt enim *c*=C & *e*=E, *per conſtruct.* Ergo *ec* : *cb* = EC : CA (§. 206.): *Q. e. d.*

SCHOLION.

221. *In omnibus iſtis reſolutionibus ſupponitur planities perfecte horizontalis, quæ cum rariſſime in praxi occurrat, ſi notabilis fuerit declivitas non tam inſtrumenti altitudo, quam ipſa CB addenda, in altitudine acceſſa facile inveſtiganda.*

PROBLEMA XXVII.

222. *Altitudinem inacceſſam AB metiri.*

RESOLUTIO.

Tab. V, Fig. 66. n. I

1. Statione in D electa menſula collocetur ut in problemate præcedente (§. 220.).
2. Ducantur ut ibidem rectæ *ef* & *af*.
3. Baculi in G defixi, ut ſit in recta *f* C. qræratur diſtantia a puncto *f* (§. 109.) &
4. Ex ſcala Geometrica transferatur in *fe* (§. 215.).
5. Sub puncto *f* in D defigatur baculus & menſula ita collocetur in G, ut punctum *e* ipſi G immineat & per diop-

tras regulæ ad ef applicatæ respicienti baculus in D occurrat.

6. Vertatur regula circa punctum e, donec per dioptras prospiciens apicem A videat, ducaturque recta ea.

7. Ex puncto a demittatur ac ad fc perpendicularis (§. 177.): quæ

8. Ad scalam geometricam (§. 215.) applicata prodit altitudinem AC.

Tab. V. Fig. 66. n. 2.

9. Quodsi puncta B, F, D fuerint in eadem recta, addatur altitudo puncti f, ut habeatur AB; sin minus, regula circa e vertatur, donec per dioptras despiciens videat B, ducatur eb, perpendiculum ac continuetur, donec ipsi eb in b occurrat. Etenim ab in scalam geometricam translata manifestabit AB.

DEMONSTRATIO.

In △△ enim fea & FeA est angulus afe = AFC & aef = AeF *per construct.* Ergo $fe : ea$ = Fe : eA (§. 206.). Porro AC & ac perpendiculares ad FC (§. 101. & *constr.*), adeoque inter se parallelæ (§. 200.). Quare $ae : ac$ = Ae : AC (§. 207.), consequenter $fe : ac$ = Fe : AC (§. 138. *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Quoniam ab parallela ipsi AB *per demonstrata*: erit $ae : ab$ = Ae : AB (§. 207.), consequenter $fe : ab$ = Fe : AB (*per demon-*

monſtr. & (§. 138. *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

Aliter.

1. Inveſtigetur quantitas anguli AFC in D & anguli AeC in G itemque CeB in eadem ſtatione G (§. 129.). Tab. V. Fig. 66.
2. Quæratur diſtantia Fe (§. 109.).
3. Conſtruatur ex his datis juxta ſcalam modicam triangulum aef (§. 215.).
4. Demittatur ex vertice *a* in baſin continuatam perpendicularis *ac* (§. 177.) indefinite producenda.
5. Fiat angulus *ceb* ipſi CeB æqualis (§. 171.) & producatur crus *eb* donec perpendiculari *eb* in *b* occurrat (§. 15.)

Dico eſſe *fc* : *ab*=FC : AB.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum præcedente.

CAPUT IV.
DE CIRCULI SYMPTOMATIS.

THEOREMA XXXVI.

223. *In eodem vel in æqualibus circulis chordæ æquales AB & DE æquales arcus ſubtendunt: & contra.* Tab. V. Fig. 62.

DE-

DEMONSTRATIO.

Quoniam AB=DE *per hypoth.* BC =CE & AC=DC (§. 32.); angulus ACB =DCE (§. 176.), conſequenter arcus AB & DE, menſuræ angulorum ACB & DCE (§. 45.), æquales ſunt (§. 119.). *Quod erat primum.*

Arcus AB & DE æquales ſunt *per hypoth.* Sunt vero etiam iidem menſuræ angulorum ACB & DCE (§. 45.): anguli igitur iſti æquales ſunt (§. 119.). Quoniam porro BC=CE & AC=CD (§. 32.); erit quoque AB=DE (§. 150.). *Quod erat alterum.*

THEOREMA XXXVII.

Tab. V. Fig. 62. 224. *Si in circulis inæqualibus arcus* AB *&* ab *fuerint ſimiles, chordæ cognomines ad ſuos radios* AC *&* ac *eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam arcus AB & *ab* ſimiles ſunt, *per hypoth.* iidemque menſuræ angulorum ACB & *acb* (§. 45.). erit ACB=*acb* (§. 118.). Eſt vero AC: BC=*ac*: *bc* (§. 32. *Geom.* & § 108. *Arithm.*). Ergo AB: BC=*ab*: *bc* (§. 154.). *Q. e. d.*

THEOREMA XXXVIII.

Tab. V. Fig. 64. 225. *Radius CE chordam* BA *bifariam ſecans in D etiam arcum bifariam ſecat*

in

in E & ad chordam AB perpendicularis: & contra.

DEMONSTRATIO.

AD=DB, *per hypoth.* AC=CB (§. 32.) & DC=DC. Ergo $o=x$ & $y=u$ (§. 167.), consequenter CE ad AB perpendicularis in D (§. 67) & arcus AE atque EB, æqualium angulorum u & y mensuræ (§. 45.), æquales sunt (§. 119.), *Quod erat primum.*

Sint arcus A E & E B æquales *per hypoth.* cum iidem sint mensuræ angulorum u & y (§. 45.); erit $y=u$ (§. 119.). Est vero etiam AC=CB. (§. 32.) & DC =DC. Ergo AD=DB & $o=x$ (§. 150.), consequenter CD ad AB perpendicularis (§. 67.). *Quod erat secundum.*

Sit denique radius CE perpendicularis ad chordam AB in D *per hypoth.* erit $o=x$ (§. 67.). Est vero etiam AC=CB (§. 32.) & hinc $m=n$ (§. 155.). consequenter $y=u$ (§. 193.) Quare arcus AE & EB æqualium angulorum u & y mensuræ æquales sunt (§. 119.) & AD=DB (§. 196.). *Quod erat tertium.*

THEOREMA XXXIX.

Tab. V. Fig. 64.

226. *Si recta NE chordam AB bifariam secet & ad eam perpendicularis fuerit; per centrum transit & tam arcum AEB, quam ANB bifariam secat.*

DE-

DEMONSTRATIO.

Quoniam ND perpendicularis ad AB, *per hypoth.* erit o=x (§. 67.). Eſt vero etiam AD=DB *per hypoth.* & ND=ND. Ergo AN=NB (§. 150.), conſequenter arcus cognomines æquales ſunt (§. 223.) Eodem modo oſtenditur arcus AE & EB æquales eſſe. *Quod erat unum.*

Arcus AN=NB & AE=EB, *per demonſtr.* Ergo NA + AE=NB + BE (§. 66. *Arithm.*), conſequenter NE diameter circuli (§. 112.), adeoque per centrum tranſit (§. 31.). *Quod erat alterum.*

PROBLEMA XXVIII.

227. *Datum arcum* AB *in duas partes æquales dividere.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Tab. V. Fig. 64. Ducatur ad punctum medium E chordæ AB perpendicularis NE (§. 173.), hæc arcum AB bifariam ſecabit (§. 226.) *Q. e. f. & d.*

PROBLEMA XXIX.

Tab. V. Fig. 65. 228. *Per data tria puncta non in directum jacentia A, B & C. circulum deſcribere.*

RE-

RESOLUTIO.

1. Ex A & C fiant interſectiones in D. &E, itemque aliæ duæ G & H ex C & B.

2. Ducantur rectæ DE & GH (§. 107.) Dico I eſſe centrum circuli per A, C & B deſcribendi (§. 110.).

DEMONSTRATIO.

Puncta A, C & B ſunt in peripheria alicujus circuli *per hypoth.* atque adeo rectæ AC & CB chordæ (§. 30.). Sed ED ad AC, GH ad BC perpendicularis & ED ipſam AC, GH vero BC bifariam ſecat (§. 173.). Ergo utraque per centrum tranſit (§. 226.). Quare cum DE & GH in I ſe mutuo ſecent; erit I centrum circuli per puncta data A, C & B tranſeuntis. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

229. Aſſumtis in peripheria vel arcu circuli tribus punctis, centrum inveniri datusque arcus perfici poteſt.

COROLLARIUM II.

230. Omne triangulum eſt circulo inſcriptibile (§. 102.).

THEO-

THEOREMA XL.

231. *Recta IL. radio CL perpendiculariter insistens tangit circulum in unico puncto L.*

DEMONSTRATIO.

Tab. I. Fig. 3.

Ducatur enim quælibet alia CK (§. 107.). Quoniam IL perpendicularis ad CL *per hypoth.* adeoque L est rectus (§. 66.); K erit acutus (§. 178.). Ergo CK > CL (§. 180.): consequenter quodlibet punctum K a L diversum, hoc est, tota linea LI seu HI extra circulum cadit (§. 32.), & ideo circulum tangit in unico puncto L (§. 39.). *Q. e. d.*

THEOREMA XLI.

232. *Omnis recta HI circulum tangens radio CL ad punctum contactus ducto perpendicularis est.*

DEMONSTRATIO.

Tab. I. Fig. 3.

Ponamus IL non esse ipsi CL perpendicularem. Ergo ex C duci poterit KC ad HI perpendicularis (§. 177.) hæcque utpote tangens *per hypoth.* extra circulum cadet (§. 39.), consequenter CK > CN (§. 63. *Arithm.*) > CL (§. 32. *Geom.* & §. 67. *Arithm.*). Est vero

etiam

etiam CK < CL (§. 180.): quod cum sit absurdum, tangens IL radio CL ad contactum perpendicularis. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

233. Tangens IL efficit cum radio CL in puncto contactus rectum (§. 66.).

COROLLARIUM II.

234. Si HI circulum tangat & ex centro C ad eam perpendicularis CL demittatur (§. 177.), punctum contactus L determinatur.

PROBLEMA XXX.

235. *Ducere rectam HI circulum in dato puncto L tangentem.* Tab. I. Fig. 3.

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

1. Ex centro circuli C ad punctum contactus L ducatur radius CL.
2. In L excitetur perpendicularis LH (§. 195.), quæ circulum in L tanget (§. 232.). *Q. e. f. & d.*

THEOREMA. XLII.

236. *Arcus FG & HI inter chordas parallelas intercepti sunt æquales.* Tab. VI. Fig. 68.

DEMONSTRATIO.

Demittatur CK ex centro C perpendicularis ad FH (§. 177.); erit eadem perpendicularis ad GI (§. 181.) ob FH

& GI *per hypoth.* parallelas, dividetque adeo tam arcum FKH, quam GKI bifariam in K (§. 225.) Quare KF—GK=KH—KI, hoc eſt, FG=HI (§. 69. *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA XLIII.

Tab. I. Fig 9.

237. *Angulus ad centrum ACD eſt duplus anguli ad peripheriam ABD, eidem arcui AD inſiſtentis.*

DEMONSTRATIO.

I. Ducatur EF per centrum C ipſi BD parallela (§.202.); erit EB=DF (§.236.), adeoque $o=x$ (§. 119.). Sed $o=y$ (§. 132.). Ergo $x=y$ (§. 65. *Arithm.*) $=\frac{1}{2}$ ACD. Porro $o=u$ (§. 182.). Ergo $u=y=\frac{1}{2}$ ACD (§. 65. *Arithm.*) *Quod erat primum.*

Tab. VI. Fig. 69.

II. In caſu altero $o=2y$ & $u=2x$ *per caſ.* 1. Ergo $u+o=2x+2y$ (§. 66. *Arithm.*), hoc eſt, ABD$=\frac{1}{2}$ACD (§. 72. *Arithm.*) *Quod erat ſecundum.*

Fig. 70.

III. In caſu tertio $o+u=2y+2x$ *per caſ.* 1. & $o=2y$ *per caſ.* 1. Ergo $u=2x$ (§. 69. *Arithm.*) hoc eſt, $\frac{1}{2}$ ACD=ABD (§. 72. *Arithm.*). *Quod erat tertium.*

THEOREMA XLIV.

238. *Anguli ad peripheriam ABD menſura eſt arcus dimidius AD, cui inſiſtit.*

DE-

DEMONSTRATIO.

I. Sit ABD angulus in majore ſegmento: inſiſtet ergo arcui minori AD quam ſemicirculo (§. 58. 44.) adeoque ipſi reſpondet angulus ad centrum ACD (§. 60. 112.) Sed anguli ACD menſura eſt arcus AD (§. 61.). Ergo ipſius ABD menſura dimidius arcus AD (§. 237. 119.). *Quod erat unum.* Tab. I. Fig. 9.

II. Sit ACB angulus in ſemicirculo. Ducatur utcunque recta CD; erit arcus dimidius AD menſura anguli ACD & $\frac{1}{2}$ DB menſura ipſius DCB *per caſ.* 1. Ergo $\frac{1}{2}$ ADB menſura anguli ACB. *Quod erat ſecundum.* Tab. VI. Fig. 71.

III. Sit denique HIK angulus in minore ſegmento. Ducatur utcunque recta IL; erit ut ante $\frac{1}{2}$ HL menſura anguli HIL & $\frac{1}{2}$ LK menſura anguli LIK *per caſ.* 1. Ergo denuo $\frac{1}{2}$ HLK menſura anguli HIK. *Quod erat tertium.* Tab. VI. Fig. 72.

COROLLARIUM I.

239. Duo vel plures anguli HLI & HMI eidem arcui HI vel æqualibus arcubus inſiſtentes æquales ſunt (§. 119.). Tab. I. Fig. 10.

COROLLARIUM II.

240. Quare cum porro ſit $o = x + u$ (§. 186.); erit anguli extra centrum menſura dimidium arcuum HI & LM, quibus ipſe & ejus verticalis K inſiſtunt (§. 238.). Tab. I. Fig. 10.

COROLLARIUM. III.

Tab. VI. Fig. 71.

241. Cum angulus in semicirculo ACB semicirculo insistat *per hypoth.* mensura ejus est circuli quadrans (§. 238.), adeoque ipse rectus est (§. 120.).

COROLLARIUM. IV.

Tab. VI. Fig. 72.

242. Cum angulus in majore segmento DIF arcui minori DF, quam est semicirculus, insistat (§. 58.), mensura ejus est semiquadrante minor (§. 238.), adeoque ipse recto minor (§. 120.), consequenter acutus (§. 54.).

COROLLARIUM. V.

Tab. VI. Fig. 72.

243. Non absimili ratione liquet, angulum in minore segmento HIK esse obtusum.

COROLLARIUM. VI.

Tab. VI. Fig. 73.

244. Quoniam o=x + y (§. 186.). & anguli o mensura est $\frac{1}{2}$ LM, anguli y vero $\frac{1}{2}$ NO (§. 238.); anguli extra peripheriam G mensura est differentia inter dimidium arcum concavum LM, cui insistit, & dimidium convexum NO inter crura interceptum.

PROBLEMA XXXI.

Tab. VI. Fig. 74.

245. *Normam examinare: utrum exacta sit: nec ne.*

RESOLUTIO.

1. Describatur intervallo arbitrario semicirculus AEF &

2. Du-

2. Ducantur in eo ex diametri utroque extremo A & F ad punctum E in peripheria arbitrario assumtum rectæ AE & FE.

3. Cruribus anguli AEF ita applicetur norma, ut ejus vertex super E cadat. Hoc enim si fieri potest; erit norma exacta.

DEMONSTRATIO.

Tum enim angulus normæ LEM æqualis est angulo AEF (§. 142.), adeoque rectus (§. 241.), consequenter norma exacta (§. 175.). *Q. e. d.*

THEOREMA LXV.

246. *Mensura anguli minoris segmenti ATB est dimidium arcus TDB; anguli vero majoris segmenti BTH dimidium arcus majoris BGT.*

Tab. VI. Fig. 75.

DEMONSTRATIO.

Ducatur ex puncto contactus T diameter TE; erit ATE rectus (§. 233.). Cum adeo ejus mensura sit arcus dimidius EBT (§. 112. 120.), anguli vero BTE dimidius arcus EB (§. 238.); erit anguli ATB mensura dimidius arcus BDT. *Quod erat unum.*

Eodem modo patet, cum dimidius semicirculus EGT sit mensura anguli ETH (§. 112. 120.) & dimidius arcus EB mensura anguli BTE (§. 238.), esse

dimidium arcum BGT mensuram anguli BTH. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM I.

247. Cum anguli G mensura etiam sit dimidius arcus BDT, ipsius D vero arcus dimidius BGT (§. 238.); angulus in majore segmento G æqualis est angulo minoris segmenti ATB & angulus in minore segmento D æqualis est angulo majoris segmenti BTH (§. 119.)

COROLLARIUM II.

Tab. VI. Fig. 75.

248. Si chorda GT ultra circulum continuetur in F; erit anguli BTF mensura semisumma arcuum TB & TG a chordis cognominibus subtensorum. Nam ATF = GTH (§. 132.). Ergo ejus mensura dimidius arcus TG (§. 246.). Est vero anguli ATB mensura arcus dimidius TB (§. *cit.*). Quare semisumma eorundem arcuum est mensura anguli BTF.

PROBLEMA XXXII.

Tab. VI. Fig. 77.

249. *Inter duas lineas AB & BE, mediam proportionalem BD invenire.*

RESOLUTIO.

1. Jungantur lineæ datæ AB & BE in directum dividaturque AE bifariam in C (§. 173.).
2. Ex C intervallo ipsius AC describatur semicirculus ADE (§. 113.).
3. Ex B erigatur perpendicularis BD (§. 175.).

Dico

Dico esse AB : BD=BD : BE.

DEMONSTRATIO.

Quoniam BD perpendicularis ad AE, *per construct.* m & n sunt anguli recti (§. 66.). Sed $o+x$ est itidem rectus (§. 241.) & y utrique triangulo ABD & ADE communis. Ergo $o=z$ (§. 193.), consequenter $y=x$ (§. *cit.*). & tunc AB: BD=BD : BE (§. 206.). Q. e. d.

COROLLARIUM. I.

250. Cum sit AB : BD=BD : BE; ex data sagitta AB & dimidia chorda BD invenitur diameter (§. 215. *Arith.*). Sit e. gr. AB =80''', BD=300'''; erit BE=1125''', adeoque AB+BE=AE 1205''' seu fere 12'.

COROLLARIUM. II.

251. Ex demonstratione una liquet, △ rectangulum ADE per lineam perpendicularem DB ex angulo recto D in hypothenusam AE demissam resolvi in duo triangula ABD & BDE inter se & toti ADE similia (§. 206.).

COROLLARIUM III.

252. Cum adeo etiam sit AB : AD=AD : AE (§. *cit.*); si lineæ fuerint majores una datarum ex A in B, altera ex A in E transfertur, factisque reliquis ut, in resolutione problematis, erit AD media proportionalis quæsita.

COROLLARIUM IV.

253. Si ergo AB sit unitas, erit BD radix ipsius BE, aut AD ipsius AE (§. 172. *Arithm.*).

THEOREMA XLVI.

Tab. I. Fig. 10.

254. *Si duæ chordæ HM & LI se mutuo secent in K; erit HK: LK=KI: KM.*

DEMOMSTRATIO.

Quoniam enim $x=x$ & $u=u$ (§. 239.) ideo HK : LK = KI : KM (§. 206.) *Q. e. d.*

THEOREMA XLVII.

Tab. VI. Fig. 73.

255. *Si fuerint duæ secantes GL & GM ex eodem puncto G ductæ; erit GM: GL=GN: GO.*

DEMONSTRATIO.

Angulus x est utrique triangulo GNO & GLM communis. Anguli GNO mensura est semisumma arcuum NL & NO (§. 248.). Sed anguli OML mensura est semisumma eorundem arcuum (§. 238.). Quare GNO=OML (§. 119.) consequenter GM : GL = GN : GO (§. 206.). *Q. e. d.*

THEOREMA XLVIII.

Tab. VI. Fig. 80.

256. *Si ex eodem puncto A ducantur duæ rectæ AD & AB, quarum altera cir-*

circulum tangit, altera secat; erit tangens AD media proportionalis inter totam secantem AB & ejus portionem extra circulum AC.

DEMONSTRATIO.

Angulus A est utrique triangulo ACD & ABD communis. Anguli ADC & ABD æquales sunt (§. 247.). Ergo AC: AD = AD: AB (§. 206.). *Q. e. d.*

CAPUT V.
DE
FIGURARUM DESCRIPTIONE.

THEOREMA XLIX.

Tab. VI. Fig. 78.

257. *In parallelogrammis latera opposita sunt æqualia, & si in figura quadrilatera latera opposita fuerint æqualia, erunt eædem parallelogramma.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam OPQN parallelogrammum *per hypoth.* erit OP parallela ipsi NQ & ON parallela ipsi PQ (§. 88.), consequenter ducta diagonali PN, erit $x=o$ & $n=m$ (§. 182.), adeoque OP = NQ & ON = PQ (§. 196.) *Quod erat unum.*

Quodsi

Quodsi OP=QN & ON=PQ *per hypoth.* cum etiam sit NP=NP; erit *x*=*o* & *n*=*m* (§. 167.), consequenter OP ipsi QN & ON ipsi PQ parallela (§. 200.), adeoque OPQN parallelogrammum (§. 88.). *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

258. Cum in Quadrato, oblongo, Rhombo & Rhomboide latera opposita æqualia sint (§. 84. 85. 86. 87.); erunt Quadratum, Oblongum, Rhombus & Rhomboides parallelogramma (§. 257.).

THEOREMA. L.

Tab. VI. Fig. 78. 259. *Diagonalis dividit parallelogramma in duas partes æquales, anguli in iis diagonaliter oppositi sunt æquales, anguli vero ad idem latus oppositi duobus rectis æquantur & duo latera simul sumta sunt diagonali majora.*

DEMONSTRATIO.

In Parallelogrammis ON=PQ & OP=QN (§. 257.). Sed PN=PN. Ergo △ NOP=△ NQP (§. 167.). *Quod erat unum.*

Quoniam in parallelogrammis OP ipsi NQ & ON ipsi PQ parallela (§. 88.): anguli O & N, N & Q, Q & P, P & O simul sumti æquantur duobus rectis (§. 182.). *Quod erat secundum.*

Quo-

Quoniam angulus O + N=N + Q *per demonstrata*; erit O=Q (§. 69. *Arithh.*). Similiter quoniam Q + P= Q + N *per demonstrata*; erit P=N (§. 69. *Arithm.*). *Quod erat tertium.*

Denique NO + PO > NP & PQ + QN > PN (§. 161.). *Quod erat quartum.*

PROBLEMA XXXIII.

Tab. VI. Fig. 79.

260. *Super data recta CD quadratum construere.*

RESOLUTIO.

1. In C erigatur perpendicularis AC (§. 195.)=CD.
2. Ex D & A intervallo ipsius CD fiat intersectio in B.
3. Ducantur AB & DB.

DEMONSTRATIO.

AC=CD=AB=BD, *per constr.* Ducta ergo diagonali AD, patet, esse C=B (§. 167.). Sed C rectus est, *per constr.* Ergo B etiam rectus (§. 122.), consequenter *o* & *x*, item *y* & *m* semirecti (§. 188.), adeoque *o* + *y* & *x* + *m* itidem recti. Quare figura est quadratum (§. 84.). *Q. e. d.*

PRO-

PROBLEMA XXXIV.

261. *Datis duabus rectis MI & IK rectangulum parallelogrammum seu oblongum construere.*

RESOLUTIO.

Tab. VI. Fig. 81.

1. Jungantur MI & IK ad angulos rectos (§. 195.).
2. Ex M intervallo ML=IK describatur arcus & ex K intervallo KL=IM alius priorem intersecans in L.
3. Ducantur rectæ ML & KL.

DEMONSTRATIO.

MI=KL & ML=IK, *per construct.* Est ergo MIKL parallelogrammum (§. 257.), consequenter I=L & I+M ac I+K=duobus rectis (§. 259.). Sed o est rectus, *per constr.* Ergo & L (§. 119.), itemque M & K recti sunt. Est ergo figura constructa oblongum (§. 86.). *Q. e. d.*

PROBLEMA XXXV.

Tab. VI. Fig. 82

262. *Data recta GH una cum angulo obliquo G rhombum construere.*

RESOLUTIO.

1. Ad rectam datam GH constituatur in G angulus dato æqualis (§. 171.).

2. Fiat

2. Fiat GE=GH & reliqua peragantur ut in probl. 33. (§. 260.).

DEMONSTRATIO.

EG=EF=FH=HG, *per conſtruct.* Eſt ergo EFHG parallelogrammum (§. 257.), conſequenter G=F & G+H ac G+E =duobus rectis (§. 259.). Sed G eſt angulus obliquus *ex hypotheſi* : Ergo & F, conſequenter etiam E & H ſunt obliqui. Adeoque figura conſtructa rhombus eſt (§. 85.). *Q. e. d.*

PROBLEMA XXXVI.

Tab. VI. Fig. 78.

263. *Datis duabus rectis ON & OP una cum angulo intercipiendo O rhomboidem conſtruere.*

RESOLUTIO.

1. Jungantur rectæ ON & OP ſub angulo dato (§. 171.).
2. Reliqua peragantur ut in probl. 34. (§. 261.).

DEMONSTRATIO.

Eadem eſt, quæ problematis præcedentis.

THEOREMA LI.

Tab. VI. Fig. 84.

264. *Si peripheria circuli dividatur in partes quotcunque æquales ducanturque ſubtenſæ AB, BC, CD &c. figura circulo inſcripta regularis eſt.*

DE-

DEMONSTRATIO.

Cum enim arcus AB, BC, CD &c. sint æquales, *per hypoth.* etiam chordæ cognomines æquales sunt (§. 223.) cumque anguli A, B, C &c. æqualibus arcubus BDE, CDA, DEB &c. insistant; ipsi quoque æquales sunt (§. 239.). Figura igitur circulo inscripta regularis est (§. 92.). *Q. e. d.*

PROBLEMA XXXVII.

265. *Invenire summam omnium angulorum in quocunque polygono.*

RESOLUTIO.

1. Multiplicentur 180° per numerum laterum.
2. A producto subtrahantur 360°: residuum est summa quæsita.

E. gr. Pentag.	180	Hexag.	180
	5		6
	900		1080
	360		360
	540		720

DEMONSTRATIO.

Tab. VI. Fig. 85. Quælibet figura ex assumto in ea puncto F in tot triangula AFB, BFC, CFD &c. resolvitur, quot habet latera AB, BC, CD &c. Si ergo 180 per numerum laterum multiplices, prodit summa omnium

nium angulorum in dictis triangulis (§. 187.). Sed anguli circa punctum F, qui non pertinent ad angulos polygoni, semper efficiunt 360° (§. 134.). Quodsi ergo a facto supra invento subtrahantur 360°, summa angulorum polygoni relinquitur. *Q. e. d.*

Aliter.

Cum numerus triangulorum ABC, CAD & DAE, in quæ resolvitur figura polygona per diagonales AC & AD ex puncto A ductas a numero laterum AB, BC, CD, DE, EA constanter binario differat; si 180° multiplicentur per numerum laterum binario mulctatum, prodit summa omnium angulorum A, B, C, D & E (§. 187.). *Q. e. i. & d.*

Tab. VII. Fig. 86.

E. gr. pro Pentag. 180 pro Hexag. 180.

3	4
540	720

COROLLARIUM.

266. Quodsi summa inventa per numerum laterum dividatur; quotus est angulus polygoni regularis (§. 92.).

PROBLEMA XXXVIII.

267. *Dato polygono regulari cuicunque ABCDE circulum circumscribere.*

Tab. VI. Fig. 84.

RESOLUTIO.

1. Duo ejus anguli E & D dividantur bifariam rectis EF & DF (§. 172.) ob an-

angulos FED & FDE duobus rectis minores concursuris in F (§. 201.).
2. Ex puncto concursus F describatur radio EF circulus (§. 110.).

DEMONSTRATIO.

Quoniam *o* & *u* sunt angulorum polygoni dimidii, *per construct.* erit $o=u$ (§. 92. *Geom.* & §. 72. *Arithm.*), consequenter EF=FD (§. 198.). circulus adeo transiens per E transit etiam per D (§. 32.). Ducatur jam ex F in A recta FA (§. 107.). Quoniam $o=x$, *per constr.* ED=AE (§. 92.) & EF=EF; erit AF=FD (§. 150.). Ergo circulus transiens per D & E transit etiam per A (§. 32.). Porro quia AF=EF, *per demonstr.* erit $m=x$ (§. 155.). Sed *x* dimidius angulus polygoni, *per constr.* Ergo & *m* (§. 65. *Arithm.*), consequenter etiam *y*. Quare si ducatur FB (§. 107.); erit, ut ante, FB=EF, adeoque radius circuli Eodem modo ostenditur, FC &, si quæ plures fuerint rectæ istiusmodi, esse radios circuli, adeoque circulum transire per omnes angulos polygoni, hoc est, eidem circumscribi (§. 102.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

268. Omnis ergo figura regularis est circulo inscriptibilis (§. 102.).

PRO-

PROBLEMA XXXIX.

269. *Invenire angulum in dato polygono regulari.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Concipiatur polygonum regulare ABCDE circulo inſcriptum (§. 268.). Quoniam arcus dimidius BCDE eſt menſura anguli quæſiti A (§. 238.); arcus vero AB, qui ipſius EAB dimidius, habetur circuli peripheria per numerum laterum diviſa (§. 223.); angulus polygoni A relinquitur, ſi arcum AB a ſemicirculo ſubtraxeris. *Q. e. i. & d.*

E. gr. Quæratur angulus pentagoni. Dividatur 360 per 5, quotus 72 eſt arcus AB, qui ex 180 ſubductus relinquit 108 angulum pentagoni quæſitum.

PROBLEMA XL.

270. *Super data recta ED polygonum regulare quodcunque deſcribere.*

RESOLUTIO.

Tab. VI. Fig. 84.

1. Quæratur angulus polygoni (§. 266. 269.).
2. Fiat in E ipſi æqualis (§. 131.) & EA =ED.
3. Per puncta A, E, D deſcribatur circulus (§. 228.).
4. In ea applicetur data recta ED, quoties fieri poteſt.

Ita deſcribetur figura quæſita (§. 264. 268.).

PROBLEMA XLI.

271. *Circulo dato polygonum regulare quodcunque inſcribere.*

Tab. VI. Fig. 84.

RESOLUTIO.

1. Dividantur 360. per numerum laterum, ut innoteſcat quantitas anguli EFD (§. 47.).
2. Conſtruatur is ad centrum (§. 131.).
3. Chorda ED ad peripheriam toties applicetur, quoties fieri poteſt.

Ita figura regularis erit circulo inſcripta (§. 264. 103.). *Q. e. f. & d.*

SCHOLION.

272. *Reſolutio problematis præſentis & præcedentis mechanica quidem eſt, cum ad conſtructionem inſtrumento tranſportatorio utamur* (§. 131.): *non tamen ideo contemnenda, tum quia univerſalis & facilis, tum quia conſtructionis rite peractæ indicium præbet.*

COROLLARIUM.

Tab. VI. Fig. 84.

273. Si Polygonum regulare circulo circumſcribendum, fiat hoc modo:

1. Inſcribatur figura regularis ſimilis circulo dato, v. gr. pentagonum ABCDE,

si pentagonum *a b c d e* circumscribendum (§. 271.). 2. Chorda AB bifariam secetur in H per rectam FH. ad eandem in H normalem (§. 173.), quæ arcum cognominem in *h* secat. 3. Per A & B producantur radii FA & FB. 4. Per *h* ducatur ipsi AB parallela radiis continuatis in *a* & *b* occurrens; erit *ab* latus unum polygoni circumscripti. 5. Producantur radii FE, FD, FC, donec fiat F*e* = F*d* = F*c* = F*a* & puncta *a*, *e*, *d*, *c*, *b* connectantur rectis *ae*, *ed*, *dc*, *cb*; erit *a b c d e* polygonum circulo circumscriptum.

THEOREMA LII.

274. *Latus hexagoni AB æquatur radio circuli circumscripti AC.* Tab. VI. Fig. 83.

DEMONSTRATIO.

Angulus C=60° (§. 45.). Ergo A+B =120° (§. 192.), consequenter, ob AC =BC (§. 32.), A=B=60° (§. 155.). Quare △ ACB æquilaterum (§. 199.), consequenter AB=AC (§. 74.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

275. Hexagonum regulare circulo inscribitur, si radius ad peripheriam sexies applicetur.

COROLLARIUM II.

276. Si ſuper linea data AB hexagonum deſcribendum; triangulum æquilaterum ACB conſtruitur (§. 163.): eſt enim vertex C centrum circuli hexagono quæſito circumſcribendi (§. 274.).

PROBLEMA XLII.

277. *Datis omnibus lateribus figuræ cujuscunque & tot diagonalibus, quot ſunt latera, demtis tribus, figuram conſtruere.*

RESOLUTIO.

Tab. VII. Fig. 86. Cum figura quælibet ABCDE per diagonales AC & AD in tot triangula BAC, CAD, DAE reſolvatur, quot ſunt latera, demtis duobus; non alia re opus eſt, quam ut unum triangulum ſuper altero excitetur (§. 168.).

PROBLEMA XLIII.

Tab. VII. Fig. 87. 278. *Datis omnibus lateribus figuræ & tot angulis, quot ſunt latera, demtis tribus, figuram conſtruere.*

RESOLUTIO.

1. Ducatur recta AB uni datorum laterum æqualis.

2. Ad A & B excitentur anguli eidem adjacentes (§. 131.) & latera AE & BC per data debite determinentur.

3. Fiat

3. Fiat porro in C angulus conveniens (§ 131.) & determinetur latus DC &c.

4. Tandem ex E & D fiat interſectio in F intervallo laterum EF & FD.

Ductis enim DF & EF, figura terminabitur eritque æqualis quæſitæ (§. 136. 149.).

Eodem modo conſtrui poſſunt figuræ regulares ex latere & angulo dato (§. 92.).

COROLLARIUM.

279. Si omnes anguli præter unum F dentur; duo latera DF & FE ut dentur opus non eſt.

PROBLEMA XLIV.

Tab. VII. Fig. 86.

280. *Areæ cujusdam campeſtris rectilineæ a b c d e libere permeabilis ichnographiam perficere, hoc eſt, figuram areæ campeſtri ſimilem deſcribere.*

RESOLUTIO.

1. Inveſtigetur longitudo ſingulorum laterum *ab*, *bc*, *cd*, *de*, *ea*, itemque diagonalium *ac* & *ad* (§. 109.).

2. Conſtruatur figura ABCDEA (§. 277.) juxta ſcalam geometricam minorem (§. 215.).

 Dico

Dico figuram ABCDE esse figuræ campi *abcde* similem.

DEMONSTRATIO.

Est enim AB:BC=*ab*:*bc*, BC:CD =*bc*:*cd*, CD:DE=*cd*:*de* &c. Etenim e. gr. *ab* 6 & *bc* 7 pedum in campo existentibus, etiam AB=6 & BC=7 in charta *per constr.* Quare cum porro sit AC: AB=*ac*:*ab*, AC:AD=*ac*:*ad*, AD:AE =*ad*:*ae* &c. *per constr.* erit $o=o$, $x=x$, $y=y$, $n=n$, $m=m$, $r=r$, $u=u$, $s=s$, $t=t$ (§. 170.), consequenter $x+m+r=x+m+r$, $y+n=y+n$, $u+s=u+s$ (§. 66. *Arithm.*). Quamobrem figura ABCDE est figuræ campi *abcde* similis (§. 148.). *Q. e. d.*

Aliter.

Tab. VII. Fig. 88.

1. Posita mensula ita in uno figuræ angulo ut punctum *a* vertici ejus immineat, per dioptras regulæ affixas collineatio fiat in baculos in singulis angulis B, C, D, E defixos ducanturque lineæ indefinitæ *ab*, *ac*, *ad*, *ae*.

2. Investigetur longitudo rectarum *a*B, *a*C, *a*D, *a*E (§. 109.) &

3. Exinde juxta scalam modicam (§. 215.) determinentur *ab*, *ac*, *ad*, *ae*.

4. Du-

4. Ducantur *bc*, *cd*, *de*.

Dico *abcde* esse similem figuræ *a*BCDE.

DEMONSTRATIO.

Quoniam in △△ *abc* & *a*BC angulus *a* communis & *ab*: *ac*=*a*B : *a*C *per constr.* erit angulus *abc*=*a*BC & *acb* =*a*CB, nec non *ab*:*bc*=AB:BC & *ac*:*bc*=AC:BC (§. 154.). Similiter quoniam in △△ *acd* & *a*CD angulus *a* communis & *ac*:*ad*=*a*C:*a*D, atque in △△ *dae* & D*a*E angulus *a* itidem communis & *ad*:*ae*=*a*D:*a*E *per construct.* erit angulus *acd*=*a*CD & *adc* =*a*DC, nec non *ac*:*cd*=*a*C:CD & *ad*:*dc*=*a*D:CD, itemque angulus *ade* =*a*DE & *aed*=*a*ED, nec non *ad* :*de*=*a*D:DE & *ae*:*ed*=*a*E:ED (§. 154.). Quoniam itaque *a*=*a*, *b*=B, *acb*+*acd*=*a*CB+*a*CD, h. e. *c*=C, *adc*+*ade*=*a*DC+*a*DE, h. e. *d*=D & denique *e*=E *per demonstrata*, figuræ *abcde* & *a*BCDE inter se æquiangulæ sunt (§. 95.). Porro cum sit *ac*:*bc*=*a*C:BC & *ac*:*cd*=*a*C:CD *per demonstr.* erit etiam *bc*:*cd*=BC:CD (§. 139. *Arithm.*) & cum sit *ad*:*dc*=*a*D :DC & *ad*:*de*=*a*D:DE *per demonstr.* erit denuo *dc*:*de*=DC:DE. Quamobrem cum quoque sit *ab*:*bc*=*a*B:BC & *ae*:*ed*=*a*E:ED *per demonstrata*; latera æquales angulos comprehendentia pro-

proportionalia ſunt. Sunt itaque figuræ *abcde* & *a*BCDE ſimiles (§. 148.). *Q. e. d.*

Aliter.

Tab. VII. Fig. 89.

1. Menſula intra figuram poſita eligatur punctum *f*, ex quo per dioptras regulæ affixas, ut ante, collineatio fiat in baculos in A, B, C, D, E & G defixos ducanturque rectæ indefinitæ *fa*, *fb*, *fc*, &c.
2. Inveſtigetur longitudo rectarum *f*A, *f*B, *f*C. *f*D, *f*E (§. 109.).
3. Inde determinetur longitudo rectarum *fa*, *fb*, *fc* &c. juxta ſcalam modicam (§. 215.).
4. Tandem ducantur *ab*, *bc*, *cd*, &c. Dico *abcdeg* eſſe figuræ ABCDEG ſimilem.

DEMONSTRATIO.

Angulus *f* utrique △ *fab* & *f* AB communis, eſtque *fa* : *fb*=*f* A : *f*B *per conſtr.* Ergo anguli ad *a* & A, item ad *b* & B æquales ſunt atque *fa*: *ab*=fA : AB (§. 154.). Eodem modo oſtenditur eſſe in △ △ *fga* & fGA angulos ad *a* & A æquales, atque *fa*: *ag*=FA : AG, conſequ nter *ab*: *ag*=AB : AG (§. 139. *Arithm.*) & angulus *bag*=BAG (§. 64. *Arithm.*). Quare cum eadem ratione demonſtretur, eſſe g=G, *e*=E, *d*=D, *c* =C, *b*=B & *ag*: *ge*=AG: GE; *ge*: *ed* =GE: ED, *ed*: *dc*=ED: DC, *dc*: *cb* =DC:

=DC : CB & *cb*: *ba*=CB : BA, figura *abcdeg* eſt majori ABCDEG ſimilis (§. 148.). *Q. e. d.*

Aliter.

Tab. VII. Fig. 86.

1. Collocato inſtrumento goniometrico in *a* inveſtigetur quantitas angulorum *x*, *m*, *r* (§. 129.) & longitudo rectarum *ab*, *ac*, *ad* & *ae* (§. 109.).
2. Conſtruantur juxta ſcalam modicam △△ ABC, ACD & ADE (§. 151.).

Dico ABCDE eſſe ſimilem figuræ *abcde*.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum ſecunda problematis præſentis.

Aliter.

Tab. VII. Fig. 89.

1. Collocato inſtrumento goniometrico in *f*, inveſtigetur quantitas angulorum A*f* B, B *f* C, C*f* D, D *f* E, E*f* G, G*f*A (§. 129.) & longitudo rectarum *f*A, *f*B, *f*C, *f*D, *f*E, *f*G (§. 109.).
2. Conſtruantur, ut ante, juxta ſcalam modicam △△ *bfa*, *agf*, *fge*, *efd*, *dfc* & *cfb* (§. 151.).

Dico *abcdeg* eſſe ſimilem figuræ ABCDEG.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum tertia problematis præſentis.

SCHOLION.

Tab. VII. Fig. 91. 281. *Ichnographia areæ ABCDE ex duabus stationibus A & B etiam perfici potest.*

1. *Posita nempe mensula in A collineatio fiat in singulos areæ angulos B, C, D & E ducanturque rectæ versus eos ex* a. 2. *Quæratur distantia stationum AB* (§. 109.) *& in mensulam ex scala geometrica* (§. 215.) *transferatur in* ab. 3. *Mensula ex A deferatur in B, ita, ut punctum cognomine* b *in ea designatum ipsi B respondeat & regula ad lineam* ba *applicata per dioptras collineanti baculus in A defixus occurrat.* 4. *Ex puncto* b *in singulos rursus figuræ angulos collineatio fiat, & versus eos rectæ ducantur, quæ priores in* e, d, c *intersecant.* 5. *Denique jungantur puncta* a *&* e, e *&* d, d *&* c, *rectis* ae, ed, dc. *Ita, ichnographia erit absoluta.*

Aliter.

Tab. VII. Fig. 91. 1. *In A investigetur quantitas angulorum DAE, DAC & CAB, itemque ex B quantitas angulorum ABE, EBD & DBC* (§. 129.), *quæraturque stationum distantia AB* (§. 109.). 2. *ducta in charta recta* ab *per scalam modicam distantia stationum AB convenienter determinetur* (§. 215.). 3. in a *constituantur angulis DAE, DAC, CAB æquales* dae, dac, cab; *in* b *vero ipsis ABE, EBD & DBC æquales* abe, ebd *&* dbc (§. 131.). 4. *Tandem puncta intersectionum B, C, D, E, a rectis connectantur.* abcde *erit similis areæ AB CDE.*

PRO-

PROBLEMA XLV.

282. *Ichnographiam areæ perficere, cujus integram peripheriam peragrare licet.*

RESOLUTIO.

1. Menſula in A collocata collineetur in baculos in B & E defixos, ut angulo BAE æqualis *bae* in eadem deſignari poſſit. Tab. VII. Fig. 91.
2. Longitudo utriusque rectæ AB & AE (§. 109.) explorata ex ſcala minore transferatur in menſulam ex *a* in *b* & *e* (§. 215.).
3. Menſula in B translocetur ita, ut ipſi B punctum cognomine in eadem reſpondeat & viſus per dioptras collineantis baculum in A attingat. Quo facto
4. Idem dirigatur per easdem in C, quo, ſicut ante, angulo ABC æqualis *abc* & rectæ BC proportionalis *bc* in menſula deſignari poſſunt.
5. Quodſi idem cum reliquis areæ angulis & lateribus fiat; erit figura in menſula delineata areæ propoſitæ ſimilis.

DEMONSTRATIO.

Singuli enim anguli figuræ in menſula delineatæ ſunt æquales ſingulis angulis areæ

areæ & latera illius lateribus hujus homologis proportionalia ſunt *per conſtr.* Figura igitur delineata eſt areæ ſimilis (§. 148.). *Q. e. d.*

Aliter.

Quæratur longitudo omnium laterum (§. 109.) & quantitas tot angulorum, quot ſunt latera, demtis tribus (§. 129.). His enim datis ichnographia *per probl.* (§. 278.), vi demonſtrationis præcedentis, abſolvetur.

PROBLEMA XLVI.

283. *Figuræ in charta delineatæ ſimilem in campo deſignare.*

RESOLUTIO.

Quoniam hoc problema eſt inverſum alterius, quo ichnographias arearum paramus; non modo tot ejus dantur caſus, quot hujus commemoravimus, ſed & ipſius reſolutio ex reſolutionibus problematum immediate præcedentium intelligitur. E. gr. ſi ſemicirculo vel menſula & pertica utimur: anguli ſinguli figuræ aut anguli diagonalibus intercepti &c. in ſolo deſignantur *per probl.* (§. 131.) & latera vel diagonales &c. per menſuram majorem decenter determinantur.

CA-

CAPUT VI.

DE FIGURARUM DIMENSIONE AC DIVISIONE.

PROBLEMA XLVII.

284. *Invenire aream quadrati.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur longitudo lateris (§. 109.).
2. Hæc ducatur in seipsam.

Factum exprimit aream Quadrati.

Sit e. gr. Latus quadrati = 345″

```
        345
       ----
       1725
      1380
     1035
     ------
erit Area = 119025
```

DEMONSTRATIO.

Aream quadrati investigans quærit, quot digiti quadrati, hoc est, quot quadratula digitum longa & lata in eodem contineantur (§. 104.). Evidens vero est, si latus quadrati AB concipiatur in quotcunque partes æquales & quadratum ipsum

Tab. VII. Fig. 92.

ſum per rectas puncta diviſionum in lateribus oppoſitis connectentes in quadrata minora diviſum; tot eſſe quadratulorum ſeries, quot partes habet latus AB & in qualibet ſerie tot reperiri quadratula, quot latus BC vel idem AB habet partes. Numerus ergo quadratulorum invenitur, ſi latus in ſeipſum ducatur. *Q. e. d.*

Corollarium I.

285. Si latus quadrati fuerit 10, area erit 100. Cum igitur decempeda ſit 10 pedum, pes 10 digitorum &c. (§. 18.); pertica quadrata 100 pedes quadratos, pes quadratus 100 digitos quadratos &c. continet (§. 104.).

Corollarium II.

286. Si latus quadrati fuerit 12, area erit 144. Quare ſi pertica dividatur in 12 pedes; pes in 12 digitos &c. pertica quadrata continet 144 pedes quadratos; pes quadratus 144 digitos quadratos, &c. (§. 104.).

Corollarium III.

287. Datus igitur numerus in priori caſu facile in digitos, pedes & perticas quadratas reſolvitur, ſi ſcilicet a dextra ſiniſtram verſus duæ notæ digitis, duæ pedibus reſecentur: quæ enim ſiniſtram verſus reſiduæ fiunt, perticis cedunt. E. gr. 119025. digiti conficiunt 11 perticas, 90 pedes, 25 digitos.

Co-

COROLLARIUM IV.

288. Quadrata ſunt inter ſe in ratione duplicata laterum (§. 134. *Arithm.*). E. gr. Quadratum lateris dupli eſt quadruplum quadrati lateris ſimpli. Et quadrata æqualia ſunt, quorum latera æqualia ſunt.

PROBLEMA XLVIII.

289. *Invenire aream rectanguli ABDC.*

RESOLUTIO.

Tab. VII. Fig. 93.

1. Inveſtigetur longitudo laterum AB & AC (§. 109.).
2. Ducatur AB in AC. Factum erit area rectanguli.

E. gr. Sit AB=345″
AC=123

1035
690
345

erit Area=42435

DEMONSTRATIO.

Eadem eſt, quæ problematis præcedentis.

COROLLARIUM I.

290. Rectangula ſunt in ratione compoſita ſuorum laterum AB & AC (§. 134. *Arithm.*).

Co-

COROLLARIUM II.

291. Si ergo fuerint tres lineæ continue proportionales, quadratum mediæ rectangulo extremarum æquale est (§. 211. *Arithm.*).

COROLLARIUM III.

292. Si quatuor fuerint lineæ rectæ proportionales; rectangulum sub extremis æquatur rectangulo sub mediis (§. 210. *Arithm.*).

THEOREMA LIII.

Tab. VII. Fig. 94.

293. *Duo parallelogramma AB DC & ECDF super eadem basi CD & inter easdem parallelas AF & CD constituta sunt inter se æqualia.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam AB & CD, itemque EF & CD sunt latera opposita parallelogrammi *per hypoth.* erit AB=CD & EF=CD (§. 257.), consequenter AB=EF (§. 68. *Arithm.*) & hinc porro AE=BF (§. 66. *Arithm.*). Quoniam porro AC=BD & EC=DF (§. 257.); erit △ ACE=△ BFD (§. 167.), adeoque ABGC=FEGD (§. 69. *Arithm.*), consequenter ABDC =EFDC (§. 66. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

294. Quoniam AF & CD sunt parallelæ *per hypoth.* erunt perpendicula inter eas intercepta æqualia (§. 69.): quæ cum sint altitudines

parallelogrammorum (§. 101.): parallelogramma inter easdem parallelas constituta ejusdem altitudinis sunt. Patet adeo parallelogramma super eadem basi & ejusdem altitudinis aequalia esse (§. 293.).

COROLLARIUM II.

Tab. VII. Fig. 94.

295. Ergo & triangula super eadem basi, & ejusdem altitudinis aequalia sunt. Nam ▭ ACDB = ▭ ECDF (§. 294.), sed △ ACD = ½ ▭ ACDB & △ FCD = ½ ▭ ECDF (§. 259.). Ergo △ ACD = △ FCD (§. 72. *Arith.*).

COROLLARIUM III.

296. Quodcunque adeo triangulum CFD est dimidium parallelogrammi ACDB super eadem vel aequali basi CD & ejusdem altitudinis, seu intra easdem parallelas. Nam △ CDF = △ ACD (§. 295.). Sed △ ACD = ½ ▭ ACDB (§. 297.). Ergo △ DCF = ½ ▭ ACDB (§. 65. *Arithm.*).

PROBLEMA XLIX.

297. *Invenire aream rhombi & rhomboidis seu parallelogrammi obliquanguli.*

RESOLUTIO.

Tab. VII. Fig. 95.

1. In CD pro basi assumtam demittatur perpendiculum AE (§. 177.), quae erit altitudo parallelogrammi (§. 101.).
2. Multiplicetur basis per altitudinem. Factum erit area quaesita,

E. gr. Sit CD=4°5'6''
AE=2 3 4

18 24
136 8
912

Erit Area= 10°67'04''

DEMONSTRATIO.

Parallelogrammum obliquangulum æquatur rectangulo ſuper eadem baſi CD & ejusdem altitudinis AE (§. 294.). Sed area rectanguli æquatur facto ex baſi in altitudinem (§. 289.). Ergo eidem æqualis eſt area parallelogrammi obliquanguli (§. 65. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

298. Parallelogramma ſunt in ratione compoſita altitudinum & baſium (§. 116. *Arithm.*), adeoque & triangula eorum dimidia (§. 296.) in eadem exiſtunt (§. 130. *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

299. Ergo ſi altitudines ſunt æquales baſium; ſi baſes æquales, altitudinum rationem habent (§. 130. *Arithm.*).

COROLLARIUM III.

300. Parallelogramma æqualia baſes & altitudines reciprocant (§. 212. *Arithm.*).

THEO-

THEOREMA LIV.

301. *Triangulum est æquale parallelogrammo super eadem basi, sed dimidiæ altitudinis, itemque parallelogrammo super dimidia basi & ejusdem altitudinis.*

DEMONSTRATIO.

Sit AEFB parallelogrammum rectangulum, cum obliquangulo cuicunque super eadem basi AB & intra easdem basi parallelas AB & EF existenti æquale sit (§. 293.) atque adeo eidem salva quantitate substitui possit (§. 12. *Arithm.*). Jam

Tab. VIII. Fig. 96.

I. Si triangulum ADC fuerit rectangulum, assumta AD pro basi; erit CD altitudo: sumta vero DC pro basi; erit AD altitudo (§. 101). Jam cum altitudo parallelogrammi rectanguli AE sit altitudini dimidiæ trianguli CG æqualis *per hypoth.* & angulus ad D sit rectus (§. 77.) adeoque, ob EF & AB parallelas (§. 88.), is ad G similiter rectus (§. 182.), ac præterea angulus ad E itidem rectus (§. 86.), & hinc G=E (§. 122.); sint vero etiam verticales ad H æquales (§. 132.): erit △ CGH=△ EHA (§. 197.), consequenter EGDA=△ ACD (§. 66. *Arithm.*). *Q. e. d.*

II. Si triangulum ACB fuerit obliquangulum, per perpendiculum DC in duo rectangula ADC & CDB resolvetur

 (§. 66.

(§. 66. 77.). Ergo si fiat FB = DG dimidiæ altitudini; erit DGFB = △ DCB & AEGD = △ ACD *per cas.* 1. Ergo AEFB = △ ACB (§. 66. *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Tab. VIII. Fig. 97. Si DK = KB = ½ DB & GD = AG = ½ AD; erit GK = ½ AB, adeoque dimidia basis. Jam CFKD = △ DCB & GECD = △ ACD, *per cas.* 1. Quare EGKF = △ ACB (§. 66. *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

PROBLEMA L.

302. *Invenire aream Trianguli.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Tab. VIII. Fig. 98.

1. Multiplicetur basis AB per altitudinem CD; erit productum area rectanguli ejusdem baseos & altitudinis (§. 297.).
2. Productum dividatur bifariam. Ita prodit area trianguli ABC (§. 296.).

Aliter.

Basis dimidia ½ AB multiplicetur per altitudinem CD; vel basis AB per altitudinem dimidiam ½ CD. Factum erit area trianguli (§. 301. 297.).

E. gr. AB = 3° 4′ 2″
CD = 2 3 4

1368
1026
684

80028

2) ——————

△ ACB 40014

AB = 3° 4′ 2″
½ CD = 1 1 7

2394
342
42

△ 40014

½ AB = 1° 7′ 1″
CD = 2 3 4

684
513
342

△ 40014

Corollarium I.

303. Triangula æqualia baſes & altitudines dimidias (§. 212. *Arithm.*), conſequenter etiam baſes & altitudines integras reciprocant (§. 127. *Arithm.*).

Corollarium II.

304. Si area trianguli per baſin dimidiam dividitur, quotus eſt altitudo (§. 144. *Arithm.*).

Problema LI.

305. *Invenire latus quadrati parallelogrammo, vel triangulo dato æqualis.*

Resolutio.

Quæratur inter baſim & altitudinem parallelogrammi, vel inter dimidiam baſin

basin & altitudinem, aut integram basin & dimidiam altitudinem trianguli media proportionalis (§. 249.) aut in numeris (§. 214. *Arithm.*). Ita prodit latus quadrati quæsitum.

DEMONSTRATIO.

Factum enim ex basi in altitudinem exprimit aream parallelogrammi (§. 289. 297.) & factum ex dimidia basi in altitudinem, vel ex dimidia altitudine in basin aream trianguli (§. 302.). Cum adeo quadratum lineæ vel numeri reperti sit in utroque casu facto isti æquale (§. 211. *Arithm.*); erit quadratum istud in priori casu parallelogrammo, in posteriori triangulo æquale. *Q. e. d.*

THEOREMA LV.

Tab. VII. Fig. 95. 306. *In parallelogrammis & triangulis similibus altitudines sunt lateribus homologis proportionales & bases ab iis lateribus proportionaliter secantur.*

DEMONSTRATIO.

Cum altitudines AE & *ae* sint ad bases CD & *cd* perpendiculares (§. 101.); erunt E & *e* anguli recti (§. 66.), adeoque æquales (§. 122.). Et quia parallelogrammum ABDC ipsi *abdc*; triangulum CAD ipsi *cad* simile, *per hypoth.* erit C=*c* (§. 148.). Quare AC: AE = *ac*: *ae* (§. 206.). Est vero etiam AC: CD = *ac*: *cd*

(§.

(§. 148.). Ergo AE : CD = *ae* : *cd* (§. 139. *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Quoniam CD : AC = *cd* : *ac* (§. 148.) & ob E = *e* & C = *c per demonstr.* AC : CE = *ac* : *ce* (§. 206.). Erit CD : CE = *cd* : *ce* (§. 138. *Arithm.*) & CD : *cd* = CE : *ce* (§. 122. *Arithm.*) adeoque ED : *ed* = CE : *ce* (§. 127. *Arithm.*). Hinc tandem ED : CE = *ed* : *ce* (§. 122. *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

SCHOLION.

307. *Patet quoque a priori. Quoniam enim* ABDC ∽ abdc *&* △ACD ∽ △ acd *per* hypoth. *perpendicula* AE *&* ae, *pariterque segmenta basium* CE *&* ce, *itidemque* ED *&* ed *eodem modo determinantur* (§. 105. 177.), *adeoque similia sunt* (§. 106.). *Cum adeo ea eadem sint, per quae a se invicem discerni debebant* (§. 19. Arithm.), *lineae autem rectae, utpote similes* (§ 12.), *non aliter nisi ratione discerni possint; tam perpendicula, quam segmenta basium ad latera homologa figurarum eandem rationem habere debent* (§. 108. *Arithm*). *Eodem modo generaliter patet, rectas quascunque in figuris similibus eodem modo determinatas tum inter se, tum ad latera homologa eandem rationem habere.*

COROLLARIUM I.

308. Quoniam parallelogramma & triangula sunt in ratione composita altitudinum & basium (§. 298.), similia vero habent bases al-

altitudinibus proportionales (§. 307.); igitur parallelogramma & triangula similia habent rationem duplicatam homologorum laterum (§. 116. *Arithm.*). Et eodem modo patet, quod etiam sint in ratione duplicata altitudinum ac segmentorum baseos; immo linearum eodem modo utlibet determinatarum (§. 307.).

COROLLARIUM II.

309. Quoniam data figura rectilinea quacunque, alia similis construi possit, excitando nempe unum triangulum super altero (§. 277.). Hoc est determinando eodem modo latera homologa; patet quoque, figuras tam regulares similes, quam similes irregulares habere rationem duplicatam homologorum laterum, adeoque illas esse ut horum quadrata (§. 288.).

PROBLEMA LII.

Tab. VIII. Fig. 99.

310. *Invenire aream polygoni irregularis ac trapezii.*

RESOLUTIO.

1. Resolvatur per diagonales AD & AC in triangula.
2. Inveniantur areæ singulorum triangulorum (§. 302.).
3. Addantur. Erit summa area quæsita (§. 64. *Arithm.*).

E. gr. $\frac{1}{2}AD = 43'$ $\quad \frac{1}{2}AD\ 43'$ $\quad \frac{1}{2}AC = 42'$
$EF = 35$ $\quad GC = 45$ $\quad BH = 30$

215 $\quad$ 215 $\quad \triangle ABC\ 1260$
129 $\quad$ 172

$\triangle AED\ 1505$ $\quad \triangle DAC\ 1935$
$\triangle AED\ 1505$
$\triangle ABC\ 1260$

Area polygoni irreg. 47°00′

Quodsi $\frac{1}{2}$ AD multiplicetur per summam altitudinum EF+GC, vel integra AD per $\frac{1}{2}$ (EF+GC); prodibit area trapezii AEDC.

E. gr. $EF = 35$
$GC = 45$
$EF + GC = 80$
$\frac{1}{2}(EF + GC) = 40$
$AD = 86$
$AEDC = 3440$

$\frac{1}{2}\ AD = 43$
$EF + GC = 80$
$AEDC = 3440$

Similiter si in trapezio fuerit AB ipsi CD parallela; erunt triangulorum altitudines BF & GC æquales (§. 69. 101.), consequenter trapezii area prodit, ducta semisumma basium parallelarum AB & CD in altitudinem ejus BF (§. 302.).

Tab. VIII. Fig. 100.

E. gr. Sit AB 246″, CD=378″, BF=195″

erit ½ (AB + CD) = 312
BF = 195

	1560
	2808
	312
Area Trapezii	60840

THEOREMA LVI.

Tab. VIII. Fig. 102.

311. *Figura regularis ABCDE ex centro circuli circumſcripti F in triangula æqualia atque ſimilia reſolvitur & area ejus æquatur triangulo, cujus baſis peripheria totius polygoni AB + BC + CD &c. altitudo perpendiculum FG ex centro F in latus unum AB demiſſum. Idem valet de area circumſcripti abcde, niſi quod altitudo ſit radius Fg.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam AB=BC=CD=DE=AE (§. 92.) & AF = FB = FC = FD = FE (§. 32.); triangula AFB, BFC, CFD, EFD, AFE æqualia & ſimilia ſunt (§. 167.). *Quod erat unum.*

Conſtituantur triangula AFB BFC, CFD &c. in quæ reſolutum eſt polygonum ABCDE ſuper eadem recta AA (§. 164.) Erigatur in A perpendicularis A*f* (§. 195.) ipſi altitudini triangulorum æqualis. Erit A*f*B=AFB, B*f*C= BFC,

BFC, CfD = CFD &c. (§. 295.), consequenter AfA = AFB + BFC + CFD &c. (§. 66. *Arithm.*) æqualis est areæ polygoni regularis (§. 64. 65. *Arithm.*). *Quod erat secundum.*

Cum recta Fg ex centro F ad contactum g ducta sit radius & ad latus ae perpendicularis (§. 232.); erit ea altitudo trianguli aFe (§. 101.). Reliqua patent ut ante. *Quod erat tertium.*

PROBLEMA LIII.

312. *Invenire aream polygoni regularis.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

Tab. VI. Fig. 84.

1. Latus polygoni AB multplicetur per dimidium laterum numerum, e. gr. latus hexagoni per 3.

2. Factum porro ducatur in perpendiculum HF ex centro circuli circumscripti in latus AB demissum.

Ita prodit area quæsita (§. 302. 311.).

E. gr.

E. gr. AB=5° 4′	
dimidius Numerus later.	$2\frac{1}{2}$
	27
	108
Semiperimeter	135
FH =	29
	1215
	270
Area Pentagoni	39°15′

THEOREMA LVII.

313. *Circuli & figuræ ſimiles ipſis inſcriptæ vel circumſcriptæ ſunt inter ſe ut quadrata diametrorum.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus deſcribi duos circulos & iis circumſcribi quadrata, omnia utrobique eodem modo determinabuntur (§. 105.). Sunt ergo figuræ utræque inter ſe ſimiles (§. 106.). Cum adeo utrobique eadem ſint, per quæ diſtingui debent (§. 19. *Arithm.*). Quadrata circulis circumſcripta ad ſuos circulos eandem rationem habere debent. Quamobrem circuli inter ſe ſunt ut quadrata diametrorum. (§. 122. *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Eodem modo oſtenditur, figuras ſimiles circulis inſcriptas eſſe ut circulos, quibus inſcribuntur. Sed circuli ſunt ut quadrata diametrorum, *per demon-*

ſtra-

strata. Ergo figuræ ipsis inscriptæ & circumscriptæ similes sunt ut quadrata diametrorum (§. 117. *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

314. Habent ergo circuli rationem duplicatam diametrorum (§. 288.), adeoque, cum radii sint ut diametri (§. 31. *Geom.* & §. 130. *Arithm.*), & radiorum (§. 117. *Arithm.*)

THEOREMA LVIII.

315. *Circulus æqualis est triangulo, cujus basis peripheriæ, altitudo radio æqualis.*

DEMONSTRATIO.

Tab. VIII. Fig. 101.

Concipiatur peripheria circuli in partes numero infinitas inter se æquales, adeoque infinite parvas divisa; arcus infinite exigui *ab* supra chordam cognominem excessus erit quovis dato minor, seu inassignabilis, adeoque revera nullus. Concipiantur porro ex centro *c* ad extrema arcus infinite parvi *ab* ducti radii *cb* & *ca*; erit angulus *acb* infinite parvus, adeoque *a* & *b* non different a recto (§. 187.), consequenter si *ab* sumatur pro basi, radius *ac* erit trianguli *abc* altitudo (§. 101.). Cum adeo area circuli resolvatur in istiusmodi triangula numero

in-

infinita, quorum altitudo communis eſt radius *ac*, baſes vero junctim ſumtæ ſunt peripheriæ circuli æquales, *per demonſtrata*; erit ille æqualis triangulo, cujus baſis peripheria, altitudo radius circuli (§. 311.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

316. Sunt igitur circuli in ratione compoſita peripheriarum & radiorum (§. 298.). Sed iidem ſunt in ratione duplicata radiorum (§. 314.). Quare peripheriæ ſunt inter ſe ut radii (§. 116. *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

317. Cum adeo ſit ut peripheria circuli unius ad ſuum radium, ita peripheria alterius cujuscunque ad ſuum (§. 122. *Arithm.*); ratio perpheriæ ad radium ſeu diametrum (§. 31. *Geom.* & §. 127. *Arithm.*) in omnibus circulis eadem.

THEOREMA LIX.

Tab. VIII. Fig. 106.

318. *Sector circuli ACD æqualis eſt triangulo, cujus baſis arcus AD, altitudo radius AC.*

DEMONSTRATIO.

Eadem eſt, quæ theorematis præcedentis (§. 315.).

THEOREMA LX.

Tab. VIII. Fig. 104.

319. *In triangulo rectangulo ABC quadratum hypothenuſæ AC æquale eſt*

quæ-

quadratis laterum AHIB & BCED simul sumtis.

DEMONSTRATIO.

Ducantur rectæ AE &BF (§. 107.), itemque BK ipsi CF parallela (§. 202.). Quoniam △ ACE cum quadrato CEDB super eadem basi & inter easdem parallelas (§. 258.) existit; hujus dimidium est (§. 296.). Ex eadem ratione △ BCF est dimidium parallelogrammi LCFK. Enimvero quia $x=o$ (§. 84. 122.), adeoque $x+y=o+y$ (§. 66. *Arithm.*), BC=CE & AC=CF (§. 84.); ideo △ ACE=△ BCF (§. 150.), consequenter BCED= LCFK (§. 71. *Arithm.*). Eodem modo ostenditur, esse AHIB=ALKG. Quamobrem BCED+AHIB = LCFK + AL KG (§. 66. *Arithm.*) = ACFG (§. 64. *Arithm.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

320. *Hoc theorema* Pytagoras *invenit: unde* Pythagoricum *dicitur. Amplissimi per Mathesin universam est usus: ideo ab illius auditoribus* hecatombe, *hoc est, centum boum sacrificio redemtum fertur.*

COROLLARIUM I.

321. Quadratum construitur duobus aut pluribus datis simul sumtis æquale, si 1. latera duorum AC & AB jungantur ad angulos rectos (§. 195.); 2. super ducta hypothenusa BC

Tab. VIII. Fig. 105.

BC erigatur latus tertii CD perpendiculariter (§. *cit.*) ducaturque hypothenusa BD &c. Est enim $BC^2 = AB^2 + AC^2$ & $BD^2 = BC^2 + CD^2$ (§. 319.). Ergo $BD^2 = AB^2 + AC^2 + CD^2$ &c.

COROLLARIUM II.

Tab. VIII. Fig. 103

322. Quodsi AB fuerit $= 1$ & $AC = 1$; erit $CB = \sqrt{2}$. Si porro fiat $AD = CB = \sqrt{2}$; erit $DB = \sqrt{3}$. Si fiat $AE = 2$; erit $BE = \sqrt{5}$. Si fiat $AF = EB = \sqrt{5}$; erit $FB = \sqrt{6}$ & ita porro infinitum. Omnes adeo radices quadratæ surdæ sunt ad unitatem, ut linea recta ad aliam rectam, consequenter numeri (§. 7. *Arithm.*); iique irrationales (§. 29. 209. *Arithm.*),

COROLLARIUM III.

323 Cum CB sit diagonalis Quadrati (§. 97.); erit ea ad latus AB ut $\sqrt{2}$ ad 1. Sed $\sqrt{2}$ est numerus irrationalis (§. 322.): adeoque unitati incommensurabilis (§. 29. *Arithm.*), consequenter diagonalis quadrati est lateri incommensurabilis.

PROBLEMA LIV.

Tab. VIII. Fig. 106.

324. *Datis chorda AB & radio AC invenire chordam arcus dimidii AD.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

Quoniam radius CD arcum AB bisecat in D *per hypoth.* etiam chordam AB bisecat & ad eam perpendicularis (§. 225).

225.), adeoque anguli ad E recti sunt (§. 66.). Quare

1. A quadrato radii AC subtrahatur quadratum chordæ dimidiæ datæ AE: residuum est quadratum ipsius EC (§. 319.).
2. Ex hoc residuo extrahatur radix quadrata (§. 190. *Arithm.*), quæ erit EC.
3. Hæc ex radio DC subducta relinquit DE.
4. Addantur quadrata AE & DE, summa est quadratum DA (§. 319.).
5. Inde ergo si extrahatur radix (§. 190. *Arithm.*); habetur chorda arcus dimidii AD.

E. gr. Sit radius AC = 10000 & AB latus hexagoni; erit AB itidem 10000 (§. 274.) & AE = 5000.

Quare

$AC^2 =$	100000000	$AE^2 =$	25000000
$AE^2 =$	25000000	$ED^2 =$	1795600
$CE^2 =$	75000000	$DA^2 =$	26795600
		$DA =$	5176
$CE =$	8660		
$DC =$	10000		
$DE =$	1340		

PROBLEMA LV.

325. *Dato latere polygoni regularis inscripti AB invenire latus circumscripti FG.* Tab. VIII. Fig. 107.

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

Quoniam FG parallela ipsi AB & DC chordam AB bifariam dividit (§. 273.); erit AE=$\frac{1}{2}$ AB & EC:AE=CD DG (§. 207.). Quare si ob angulum rectum ad E (§. 225.) EC investigetur, ut in problemate præcedente; reperietur DG (§. 215. *Arithm.*), cujus duplum est latus polygoni circumscripti FG. Est enim EC: CD=EA : DG & EC: CD=EB: FD (§. 207.). Cum adeo sit EA:DG=EB: FD (§. 117. *Arithm.*) & EA=EB *per demonstrata*; erit etiam DG=DF (§. 126. *Arithm.*), adeoque FG=2 DG. *Q. e. i. & d.*

E. gr. Sit DC=AB=10000; erit AE =5000 & EC=8660 (§. 324.), adeoque DG=5773. Hinc FG=11546.

PROBLEMA LVI.

326. *Invenire rationem diametri ad peripheriam.*

RESOLUTIO.

1. Quærantur per continuam bisectionem latera polygonorum inscriptorum (§. 324.), donec perveniatur ad latus arcum quantumlibet exiguum subtendens.
2. Invento hoc latere quæratur porro latus polygoni similis circumscripti (§. 325.).

3.

3. Multiplicetur utrumque per numerum laterum polygoni, ut habeatur perimeter polygoni tam inſcripti, quam circumſcripti (§. 92.).

Erit perimeter polygoni circumſcripti major, inſcripti vero minor peripheria circuli. Differentia vero inter utramque perimetrum cognita haud difficulter definitur ratio diametri ad peripheriam circuli in numeris prope veris.

E. gr. Archimedes *excogitavit methodum quadrandi circulum per polygona regularia inſcripta & circumſcripta, & polygonis* 96. *laterum uſus invenit rationem diametri ad peripheriam eſſe, ut* 7 *ad* 22 *fere. Nimirum ſi diameter* 1, *perimeter polygoni inſcripti reperitur* $3\frac{10}{71}$; *perimeter vero circumſcripti* $3\frac{1}{7}$. *Ejus veſtigiis inſiſtentes poſteri rationes propiores inveſtigarunt. Nemo autem plus operæ impendit* Ludolpho a Ceulen, *qui tandem reperit, poſita diametro* 1, *peripheriam eſſe majorem quam* 3. 14159 26535897932384626433832795o, *ſed minorem quam idem numerus, ciphra ultima in unitatem mutata. Enimvero quoniam numeri adeo prolixi praxi parum reſpondent; in Geometria practica hodie a plerisque aſſumitur, diametrum eſſe ad peripheriam ut* 100 *ad* 314, *vel in circulis majoribus ut* 10000 *ad* 31415. *Perfectam tamen quadraturam in numeris finitis nemo adhuc dedit, ut ut, noſtra præſertim ætate, ars inveniendi egregie promota fuerit.*

COROLLARIUM.

327. Si diameter fuerit 113; erit peripheria (113. 31415): 10000 (§. 215. *Arithm.*) hoc eſt: 355 quam proxime. Quæ proportio Metiana inter omnes, quæ parvis numeris exprimuntur, accuratiſſima.

PROBLEMA LVII.

328. *Data Diametro circuli invenire peripheriam & aream ejus, & data peripheria diametrum.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

1. Cum detur ratio diametri ad peripheriam (§. 326. 327.); una data, invenietur altera (§. 215. *Arithm.*).
2. Peripheria ducta in quartam diametri partem, habetur area circuli (§. 315. 302.).

E. gr. Sit diameter 56'; erit

100—314=56'	Periph: 17584'''
56	¼ Diam. 1400
1884	7033600
1570	17584
Per. 17°5'8''4'''	Area 24°61'76''00'''

COROLLARIUM I.

329. Si diameter 100; peripheria 314 (§. 326.), adeoque area circuli 7850 (§. 328.). Eſt vero quadratum diametri 10000 (§. 284.): ergo hoc ad aream circuli ut

10000

10000 ad 7850, hoc est, ut 1000 ad 785 (§. 130. *Arithm.*) quam proxime.

COROLLARIUM II.

330. Area igitur circuli etiam invenitur, si ad 1000; 785 & quadratum diametri numerus quartus proportionalis quæratur (§. 215. *Arithm.*).

Sit e. gr. diameter 560''; erit quadratum ejus 31° 36' 00''. Quare

1000—31°36'00''—785
785

1568000
25088
21952

24°61'76'' Area circuli.

COROLLARIUM III.

331. Si area circuli minoris GEHF subtrahatur ex area majoris concentrici ADBC; relinquitur annulus ADBCGEHF. Tab. VIII. Fig. 109.

PROBLEMA LVIII.

332. *Data area circuli, invenire diametrum.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur ad 785, 1000 & aream circuli datam 246176 numerus quartus proportionalis 313600 (§. 215. *Ari-*

Arithm.): qui eſt quadratum diametri (§. 329.).

2. Inde extrahatur radix quadrata (§. 190. *Arithm.*): quæ eſt diameter (§. 171. *Arithm.* & §. 284. *Geom.*).

PROBLEMA LIX.

Tab. VIII. Fig. 106.

333. *Dato radio circuli* AC *una cum ratione arcus* AB *ad peripheriam, invenire aream ſectoris* ACB.

RESOLUTIO.

1. Quæratur ad 100, 314 & radium AC numerus quartus proportionalis (§. 215. *Arithm.*); quæ eſt ſemiperipheria (§. 326. *Geom.* & §. 130. *Arithm.*)
2. Quæratur porro ad 180°, arcum datum AB & ſemiperipheriam inventam numerus quartus proportionalis (§. 215. *Arithm.*): ut habeatur arcus AB in eaden menſura, in qua radius AC datur.
3. Tandem arcus AB ducatur in ſemiradium.

Factum exprimet aream ſectoris (§. 318. 302.).

E.

E. gr. Sit radius 6′; arcus 60°.

100—314—600‴
6

Semiperiph. 1884|00
180—1884—60
60) 3 ——— I
628‴=AB
300=½ AC

Area *Sectoris* ACB 1884″(00

PROBLEMA LX.

334. *Datis altitudine segmenti DE & dimidia basi AE, invenire aream ejus.* Tab. VIII. Fig. 106.

RESOLUTIO.

1. Quæratur diameter (§. 250.).
2. Describatur circulus (§. 110.) & in eo applicetur basis segmenti AB.
3. Ducantur radii AC & BC & ope instrumenti transportatorii investigetur numerus graduum arcus ADB (§. 129.).
4. Dato jam radio AC una cum arcus ADB ad peripheriam ratione investigetur area sectoris ACB (§. 333.), &
5. ex chorda AB atque altitudinis segmenti DE complemento ad radium EC area trianguli ACB (§. 302.).
6. Hoc denique ex illo auferatur: residuum erit segmentum ADBEA.

E. gr. Sit AE=300‴, DE=80‴; erit DF =1205‴ (§. 250.), arcus AB=60° (§. 129.).

129.). Ergo area sectoris ADBC 18′84″ (§. 333.). Jam EC=5′ 22 AE=300‴ Quare △ ACB=156750‴, consequenter segmentum AEBDA 31650‴.

COROLLARIUM

Tab. VIII. Fig. 106.

335. Quodsi segmentum majus BFA quæratur; triangulum BCA sectori BFACB addendum.

PROBLEMA LXI.

Tab. VIII. Fig. 108

336. *Parallelogrammum ABEC ex dato puncto D in duas partes æquales dividere.*

RESOLUTIO.

Fiat EF=AD & ducatur recta DF; erit ADFC=DBEF.

DEMONSTRATIO.

Ducatur diagonalis AE; erit $o=x$ (§. 132.) & ob parallelas AB & EC (§. 88.) $y=u$ (§. 182.). Sed AD=FE, *per constr.* Ergo △ ADG=△ FGE (§. 197.). Est vero △ ACE=△ AEB (§. 259.). Quare ACFG=DBEG (§. 69. *Arithm.*), consequenter ADFC=DBEF (§. 66. *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA LXII.

337. *Parallelogrammum atque triangulum in partes quotcunque æquales dividere.*

RE-

Resolutio.

1. Dividatur basis CD in tot partes æquales, in quot figura dividenda (§. 211.). Tab. IX. Fig. III. 113.
2. In parallelogrammo ducantur rectæ 1. 1, 2. 2; in triangulo A 1. A 2.

Demonstratio.

Quoniam parallelogramma A 1. 1 C, 1. 2. 2. 1, 2 BD 2 inter easdem parallelas AB & CD existunt (§. 88.); eandem altitudinem habent (§. 69. 101.). Sunt itaque in basium ratione (§. 299.), consequenter ob C 1=1 2=2. D, *per constr.* æquales, *Quod erat unum.*

Cum ex uno puncto A ad eandem rectam CD perpendicularis nonnisi unica duci possit, triangula AC 1, 1 A 2, 2 AD eandem altitudinem (§. 101.); adeoque basium rationem habent (§. 299.). Sed bases æquales sunt *per constr.* Ergo & triangula. *Quod erat alterum.*

Problema LXIII.

338. *Figuram rectilineam quamcunque ABCDE in partes æquales dividere.* Tab. IX. Fig. 112.

Resolutio.

1. Quæratur area figuræ (§. 310.) & dividatur in tot partes æquales, in quot figura dividi debet, e. gr. in 3.

2. Area partis, in noſtro caſu tertiæ, ulterius dividatur bifariam.
3. Area trianguli AED ſubtrahatur a parte tertia & reſiduum dividatur per $\frac{1}{2}$ AD; erit quotus altitudo trianguli AID priori AED addendum, ut AED ſit pars tertia figuræ (§. 304.).
4. Quare intervallo hujus altitudinis ducatur parallela ipſi AD (§. 202), quæ ſecabit latus AB in I: quo puncto dato, rectam DI ducere licet, tertiam partem figuræ AIDE abſcindentem.
5. Pars tertia, dimidia, ſive ſexta totius figuræ dividatur per $\frac{1}{2}$ DI, quotus erit altitudo trianguli IKD ſextam figuræ partem conſtituentis (§. 304.).
6. Intervallo igitur hujus altitudinis agatur ipſi ID parallela, ut habeatur punctum K (§. 202.).
7. Dividatur quoque dimidia pars tertia figuræ per $\frac{1}{2}$ KD, ut habeatur altitudo trianguli KLD ſextæ itidem parti figuræ æqualis (§. 304.).
8. Quare hujus intervallo denuo agatur ipſi KD parallela (§. 202.), ut punctum L determinetur ducaturque recta KL, quæ partem figuræ tertiam KIDL reſecabit.
9. Si figura in plures quam tres partes reſolvenda, eodem modo ulterius procedendum.

SCHO-

SCHOLION I.

339. *Si AED majus tertia e. gr. parte figuræ; ipsam ab illo subtrahi necesse est & residuum erit triangulum a triangulo AED auferendum, ut tertiæ parti figuræ æqualis evadat. Sæpe etiam consultum est, ut prima pars AEDI per duo triangula uti ceteræ determinetur.*

SCHOLION II.

340. *Ubi in charta divisio absoluta; in campo puncta* I, K, L *per quantitatem rectarum* AI, IK *&* DL *facile determinantur* (§. 109.).

PARS POSTERIOR ELEMENTA GEOMETRIÆ SOLIDÆ PROPONIT.

CAPUT I.

DE PRINCIPIIS GEOMETRIÆ SOLIDÆ.

DEFINITIO I.

341. *Solidum* sive *corpus* est magnitudo tribus dimensionibus prædita, seu extensum in longitudinem, latitudinem atque profunditatem.

De-

DEFINITIO II.

Tab. IX. Fig. 115. 342. Angulus ſolidus B eſt plurium quam duarum linearum AB, BC, BF in eodem puncto B concurrentium, nec in eodem plano conſtitutarum ad omnes inclinatio. Dicuntur autem *anguli ſolidi æquales*, qui inter ſe invicem poſiti congruunt.

COROLLARIUM I.

343. Ergo angulus ſolidus B pluribus quam duobus planis in eodem plano non conſtitutis ABF, FBC, CBA continetur.

COROLLARIUM II.

344. Quoniam adeo tres minimum lineæ ad angulum ſolidum conſtituendum requiruntur (§. 342.); tres minimum anguli plani ad ſolidum conſtituendum neceſſarii.

COROLLARIUM III.

345. Si anguli plani in eodem puncto concurrentes conficiant ſummam 360 graduum; planum circuli ſternunt (§. 33. 45.), adeoque ſolidum angulum non conſtituunt (§. 343.). Quare, ſumma eorum, qui ultra ſolidum non aſſurgunt, quatuor rectis ſeu 360°(§. 121.) minor eſſe debet.

DEFINITIO III.

346. *Corpus regulare* eſt ſolidum planis regularibus & inter ſe æqualibus termi-

minatum totidem numero ad angulos conſtituendos concurrentibus. Reliqua corpora dicuntur *irregularia.*

Definitio IV.

347. Si figura rectilinea ACB juxta ductum lineæ rectæ AE motu ſibi ſemper parallelo deorſum feratur, *Priſma* ABCFDE deſcribit: & quidem *rectum*, ſi linea directrix AE fuerit ad planum deſcribens perpendicularis ſeu in nullam partem inclinatur, *obliquum* vero, ſi ea ad idem fuerit obliqua. In ſpecie *Priſma* dicitur *triangulare ſive trigonum*, ſi planum deſcribens fuerit triangulum, *quadrangulare*, ſi fuerit figura quadrilatera & ita porro.

Tab. IX. Fig. 114.

Corollarium I.

348. Quodlibet adeo priſma habet duas baſes oppoſitas ABC & EDF æquales & circumcirca terminatur tot parallelogrammis, quot baſis latera habet. (§. 347. 88.).

Corollarium II.

349. Plana ſectionum priſmatis baſi ACB parallele factarum ſunt inter ſe æqualia. Æquantur enim plano deſcribenti ACB (§. 347. *Geom.* & §. 60. *Arithm.*), ergo & inter ſe æqualia ſunt (§. 65. *Arithm.*).

Definitio V.

350. Si planum deſcribens AB CD fuerit quadratum & linea dirigens AE lateri

Tab. IX. Fig. 115.

teri ejus AB æqualis, atque angulus BAE & DAE rectus; *Cubus* describitur.

COROLLARIUM I.

351. Cubus terminatur, sex quadratis inter se æqualibus: est enim ABCD=EFGH (§. 350. *Geom.* & §. 60. *Arithm.*). Cum ex eadem ratione AB & EF sint inter se æquales atque parallelæ, & BA ad AE perpendicularis; erit etiam AE ad EF perpendicularis (§. 181.), consequenter ABFE quadratum (§. 260.), ipsi ABCD æquale (§. 288.). Eodem modo ostenditur: reliqua plana terminantia esse quadrata ipsi ABCD æqualia.

COROLLARIUM II.

352. Plana sectionum basi parallele factarum sunt quadrata ipsi æqualia (§. 350. *Geom.* & §. 60. *Arithm.*), consequenter etiam æqualia inter se (§. 65. *Arithm.*).

DEFINITIO VI.

Tab. IX. Fig. 117. 353. Si planum describens IKLM fuerit parallelogrammum; *Parallelepipedum* describitur.

COROLLARIUM I.

354. Plana sectionum basi parallele factarum sunt parallelogramma ipsi æqualia (§. 60 *Arithm.*), adeoque & æqualia inter se (§. 65. *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

355. Cum LM & NO itemque MO & LN sint æquales & inter se parallelæ (§. 347. 353. *Geom.*

&

& §. 60. *Arithm.*); erit LMNO parallelogrammum (§. 88.). Eodem modo patet, plana terminantia reliqua esse parallelogramma. Terminatur adeo parallelepipedum sex parallelogrammis, quorum bina opposita inter se æqualia sunt.

DEINITIO VII.

Tab. IX. Fig. 118.

356. Si circulus AB juxta ductum rectæ AD motu sibi semper parallelo deorsum feratur, *Cylindrus* describitur; *rectus* quidem, si recta CF, quam punctum C, in descensu describit centra basium C & F jungens, quæ *Axis* dicitur, fuerit ad bases perpendicularis; *scalenus* vero, si ad angulos obliquos iisdem insistat. Quodsi parallelogrammum rectangulum CBEF circa latus uunm CF gyretur; *cylindrum* describit *rectum.*

COROLLARIUM.

357. Sunt ergo non modo bases cylindri AB & DE æquales; verum etiam sectiones basibus parallelæ sunt circuli iisdem & inter se æquales.

DEFINITIO VIII.

Tab. IX. Fig. 116.

358. Si recta quædam KM in peripheria circuli NM ita incedat, ut constanter inhæreat puncto fixo K: describetur *Conus* NKM. Recta ex puncto K, qui *vertex* coni dicitur, ad centrum basis L ducta dicitur, *Axis coni*: qui si ad

ba-

basin Coni NM fuerit perpendicularis, *Conus rectus* est; si vero ad angulos obliquos eidem insistat, *scalenus*. Linea describens KM seu recta ex vertice in peripheriam basis ducta vocatur *Latus Coni*.

Quodsi triangulum rectangulum KLM circa rectam KL gyretur; *Conus* describitur *rectus*.

COROLLARIUM.

359. Quodsi PQ ipsi LM parallela; per ultimam coni genesin erit KP : KL = PQ : LM (§. 207.). Quare cum PQ & LM sint radii circulorum sibi invicem parallelorum: planum sectionis basi coni parallele factæ circulus est eadem minor.

DEFINITIO IX.

Tab. IX. Fig. 120. 360. Si semicirculus K juxta diametrum AB gyretur; *Sphæra* describitur, diciturque diameter circuli AB etiam *Diameter* atque *Axis Sphæræ*, centrum C etiam *Centrum Sphæræ*.

COROLLARIUM.

361. Omnes ergo rectæ ex sphæræ superficie in centrum ductæ sunt inter se æquales (§. 32.).

DEFINITIO X.

Tab. IX. Fig. 119 362. *Pyramis* est solidum terminatum circumcirca tot triangulis ADC, DCB

&

& ABD in uno puncto D coëuntibus, quot basis ABC latera habet. Dicitur autem *triangularis*, *quadrangularis*, *quinquangularis* &c. si basis triangularis, quadrangularis, quinquangularis &c.

COROLLARIUM I.

363. Si *ac*, *cb*, *ba*, lateribus AC, CB & BA basis ACB parallelæ ducantur; erit DC: Dc=CA: *ca*=CB: *cb* (§. 207.), adeoque CA: *ca*=CB: *cb* (§. 117. *Arithm.*), consequenter, cum eodem modo ostendi possit, esse CA: *ca*=AB: *ab*, erit triangulum *acb* simile triangulo ACB (§. 170.). Quare, si pyramis triangularis ACDB secatur plano basi parallelo; planum istud huic simile erit.

COROLLARIUM II.

364. Quoniam pyramis multangularis in tot triangulares resolvi potest, quot sunt latera basis, demtis duobus, nempe quadrangularis in duas, quinquangularis in tres &c. si pyramis multangularis plano basi parallelo secetur, constabit id ex triangulis, quæ singula singulis similia sunt, in quæ resolvitur basis (§. 363.), consequenter cum vi demonstrationis, primæ problematis (§. 280.) pateat, similes esse figuras rectilineas quascunque, quæ ex triangulis similibus eodem ordine inter se junctis componuntur, in quavis pyramide planum sectionis basi parallelum est figura basi similis.

DEFINITIO XI.

Tab. IX. Fig. 121. 122. 124. 123.

365. *Tetraëdrum* eſt ſolidum quatuor; *Octaëdrum* eſt ſolidum octo; *Icoſaëdrum* eſt ſolidum viginti triangulis æquilateris & æqualibus comprehenſum; *Dodecaëdrum* vero ſolidum duodecim petagonis regularibus & æqualibus contentum.

THEOREMA I.

366. *Cubus, Tetraëdrum, Octaëdrum, Dodecaëdrum & Icoſaëdrum ſunt corpora regularia, nec præter hæc quinque aliud poſſibile.*

DEMONSTRATIO.

Cubus ſex quadratis, tetraëdrum quatuor, octaëdrum octo, icoſaëdrum viginti triangulis regularibus, dodecaëdrum denique duodecim pentagonis regularibus inter ſe æqualibus terminatur (§. 351. 365.). Sunt igitur hæc corpora regularia (§. 346.). *Quod erat unum.*

In tetraëdro tres, in octaëdro quatuor, in icoſaëdro quinque anguli plani trianguli regularis ad ſolidum efficiendum concurrunt. (§. 365.). Quoniam vero ſumma 6 iſtiusmodi angulorum eſt 360° (§. 190.); triangulis regularibus nullum corpus præter illa tria contineri poteſt (§. 345.). In cubo tres anguli quadrati ſolidum efficiunt (§. 350.).

Qua-

Quare cum ſumma quatuor iſtiusmodi angulorum ſit 360° (§. 84. 121.); quadratis nullum corpus continetur niſi cubus. In dodecaëdro tres anguli pentagoni regularis ſolidum conſtituunt (§. 365.). Quia vero ſumma quatuor eſt 432° & ſumma trium in hexagono regulari 360° atque in reliquis figuris regularibus 360° major (§. 266.), ad angulum vero ſolidum conſtituendum minimum tres plani requiruntur (§. 344.); pentagonis regularibus nonniſi dodecaëdrum, figuris vero plurium laterum nullum corpus terminari poteſt. Corpora igitur regularia nonniſi quinque ſunt. *Quod erat alterum.*

CAPUT II.
DE DIMENSIONE SOLIDORUM.

DEFINITIO XII.

367. *Menſura ſolidi* eſt cubus, cujus latus perticæ unius, diciturque *Pertica cubica* Hæc dividitur in *Pedes*, *Digitos*, &c. *cubicos*, hoc eſt, in cubos, quorum latus, pedem digitum &c. adæquat.

PROBLEMA I.

368. *Superficiem ac ſoliditatem Cubi determinare.*

RESOLUTIO.

I. Cum ſuperficies cubi ex ſex quadratis æqualibus componatur (§. 351.); latus cubi in ſeipſum ducatur & factum per 6 multiplicetur (§. 284.).

Tab. X. Fig. 127. II. Quodſi Idem factum in latus ducatur: prodibit ſoliditas cubi.

Sit e. gr. latus cubi AB 2°7′4″.

AB=274	Baſis=75076
274	AB=274
1096	300304
1918	525532
548	150152
ABDC=75076	Solidit. 20°570′824″
6	
Superfic. 45°04′56″	

DEMONSTRATIO.

Cum menſuræ ſolidorum ſint cubi, quorum latera perticæ, pedi, digito &c. æqualia (§. 367.): ſoliditatem cubi determinaturus invenire debet, quot perticæ, pedes, digiti &c. cubici in eo contineantur. Quodſi jam latus in partes quotcunque æquales diviſum concipiamus, tot erunt cuborum ordines, quot in latera AB partes & in quolibet ordine to-

totidem existent, quot in basi ACFE quadrata. Quare si basin ACFE, hoc est, factum ex latere cubi in seipsum (§. 284,), per latus cubi AB multiplices; prodibit numerus cuborum minorum, ex quibus major componitur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM. I.

369. Si latus cubi fuerit 10, erit soliditas 1000: si illud 12, hæc 1728. Quare cum pertica Geometrarum sit 10 pedum, pes 10 digitorum &c (§. 18.); pertica cubica est 1000 pedum cubicorum, pes cubicus 1000 digitorum cubicorum &c. Hinc in exemplo nostro soliditas cubi est 20°570′ 824″. Similiter cum pertica Rhenana sit 12 pedum, pes 12 digitorum; pertica cubica est 1728 pedum, pes cubicus 1728 digitorum. Quare si in nostro exemplo 20570824 dividas per 2728, quotus erit 11904′ & 712″. Quodsi 11904′ porro dividas per 1728; quotus erit 6° & 1536, adeoque habebis 6°, 1536′ & 712″.

COROLLARIUM II.

370. Cubi sunt in ratione triplicata laterum (§. 116. *Arithm.*) & æquales, si latera æqualia sint.

THEOREMA II.

371. *Parallelepipeda, Prismata & Cylindri, quorum bases & altitudines æquantur, æqualia sunt.*

DEMONSTRATIO.

Concipiantur hæc corpora planis eorum basibus parallelis secari in discos crassitiei quantumlibet exiguæ. Quoniam altitudines æquantur, *per hypoth.* ex uno tot disci prodibunt, quot ex altero. Cumque plana sectionum basi parallelarum eidem æqualia (§. 354. 349. 357.); bases vero illorum corporum inter se æquales sunt, *per hypoth.* etiam disci singuli unius corporis discis singulis alterius æquantur (§. 65. *Arithm.*), consequenter cum disci omnes simul sumti cum corporibus idem sint, corpora tota inter se æqualia sunt. (§. 66. *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA II.

Tab. IX. Fig. 117. 372. *Metiri superficiem ac soliditatem parallepipedi.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur area parallelogrammorum ILMK, LMON & OMKP (§. 289. 297.).
2. Addantur in unam summam & hæc multiplicetur per 2. Erit factum superficies parallelepipedi (§. 355.).
3. Quodsi basis POMK multiplicetur per altitudinem; prodibit soliditas ejusdem.

Sit

Sit e. gr. LM=36', MK=15', MO=12' & parallelepipedum rectangulum.

LM=36'	LM=36'	MK=15'
MK=15	MO=12	MO=12
180	72	30
36	36	15
OPKM 180	LMON 432	MOKP 180
ML 36	LIKM 540	
1080	MOKP 180	
540	1152	
	2	
Solid. 6°480'		
	23°04' Superficies.	

DEMONSTRATIO.

De parallelepipedo rectangulo eadem valet demonstratio, qua in probl. (§. 368.) usi sumus. Cum vero obliquangulum æquetur rectangulo super eadem basi & ejusdem altitudinis (§. 371.); ducta basi in altitudinem habetur quoque soliditas obliquanguli. *Q. e. d.*

THEOREMA III.

373. *Planum diagonale AHFD dividit parallelepipedum ABDCEFG in duo prismata ADCEFH & ADBGFH interse æqualia.* Tab. X, Fig. 128.

DEMONSTRATIO.

Diagonalis AD dividit parallelogrammum CABD in duo triangula æqualia

ACD & DBA (§. 259.). Habent ergo priſmata baſes æquales. Quare cum DF, perpendicularis ad planum ACDB (§. 353.), ſit etiam perpendicularis ad DA & DC, adeoque cum ad triangulum ADB, tum ad alterum ADC; eadem quoque erit utriusque altitudo DF (§. 101.), & ipſa itidem æqualia ſunt (§. 371.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

374. Eſt ergo priſma triangulare dimidium parallelepipedi ſuper dupla baſi & ejusdem altitudinis.

PROBLEMA III.

475. *Metiri ſuperficiem ac ſoliditatem priſmatis.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur baſis (§. 302. 310. 312.) & multiplicetur per 2.
2. Quærantur porro areæ parallelogrammorum priſma circumcirca terminantium & earum ſumma addatur facto antecedenti.

Ita prodibit ſuperficies integra priſmatis (§. 348.).

Tab. IX. Fig. 114. 3. Quodſi baſis BAC per altitudinem CD multiplicetur; habebitur ejusdem ſoliditas.

E. gr.

E. gr. Sit BC = 4° 3′ 2″, AG = 3° 5′ 7′
CD = 8° 6′ 9″.

½BC = 216″			AC = 432″.
AG = 357			CD = 869
1512			3888
1080			2592
648			3456
Basis 77112		ACDE	375408
CD 869			3
			1126224
694008		2ABC	154224
462672			
616896		Superfic. =	1280448
67° 0 1 0′ 3 2 8″ Solidit.			

DEMONSTRATIO.

Prisma triangulare est dimidium parallelepipedi super dupla basi, sed ejusdem altitudinis (§. 374.). Quodsi vero dupla basis, hoc est, parallelogrammum multiplicetur per altitudinem; soliditas parallelepipedi prodit (§. 372.). Ergo si simpla, hoc est, triangulum per eandem altitudinem multiplicetur; parallelepipedi dimidium, hoc est, prismatis soliditas habetur. Omnia prismata reliqua cum in triangularia resolvi possint; eorum quoque soliditas prodit, basi per altitudinem multiplicata. *Q. e. d.*

SCHOLION.

276. *In exemplo nostro assumsimus, prismatis basin esse triangulum regulare. Quodsi vero basis fuerit figura irregularis, parrallelogramma lateralia inæqualia sunt, adeoque area unius cujusque sigillatim invenienda. Hæc & multa alia, quæ de corporibus, & eorundem superficiebus demonstrantur, captui tyronum magis accommodantur, si corpora ex ligno, aut charta compacta parentur. Ita etiam quinque corpora regularia* (§. 366.) *distinctius concipient, si in charta ex pluribus foliis compacta pro construendo cubo sex quadrata æqualia; pro Tetraëdro quatuor; pro Octaëdro octo; pro Icosaedro viginti triangula regularia & æqualia; pro Dodecaëdro vero duodecim Pentagona regularia & æqualia delineentur, exscindantur & debito modo conglutinentur.*

THEOREMA IV.

Tab. IX. Fig. 126.

377. *Superficies cylindri recti seclusis basibus æqualis est rectangulo sub peripheria & altitudine cylindri.*

DEMONSTRATIO.

Concipiatur arcus EF adeo parvus, ut pro linea recta haberi possit, ducanturque rectæ EG & FH inter se parallelæ & ad EF perpendiculares. Quoniam etiam EF ipsi GH parallelus (§. 356.); erit EGHF rectangulum. Superficies itaque cylindri in innumera rectangula, ipsi EFGH æqualia resolvi-

vitur, quorum communis altitudo eſt EG ſeu altitudo cylindri, baſes vero junctim ſumtæ peripheriæ æquantur. Ergo eadem æqualis eſt rectangulo ſub peripheria & altitudine cylindri (§. 299.). *Q. e. d.*

PROBLEMA IV.

378. *Data diametro AB & altitudine cylindri CF; invenire ſuperficiem ac ſoliditatem ejus.* Tab. IX. Fig. 118.

RESOLUTIO.

1. Quæratur peripheria baſeos & baſis ipſa (§. 328.), hæcque multiplicetur per 2.

2. Peripheria ducatur in altitudinem; quod prodit eſt ſuperficies ſecluſis baſibus (§. 377.).

3. Quare ſi eidem addatur factum antecedens; habebitur ſuperficies integra.

4. Ducatur quoque baſis in altitudinem. Factum erit ſoliditas cylindri.

E: gr.

E. gr. Sit AB=5°6', CF=24°6'; erit peripheria=17584'''

	17584'''
CF=	24600'''
	10550400
	70336
	35168
Sup. absq; Baſ.	4325664''|00
Dupl. Baſ.	492352
Superfic.	481°80'16''
Baſis =	246176''
CF=	2460''
	14770560
	984704
	492352
Solid.	605°592'960''

DEMONSTRATIO.

Cum circulus æqualis ſit triangulo, cujus baſis peripheria, altitudo radius (§. 315.); cylindrus æqualis erit priſmati triangulari eandem cum ipſo altitudinem & baſin æqualem habenti (§. 371.). Ejus ergo ſoliditas habetur, ducta baſi in altitudinem (§. 375.). *Q. e. d.*

THEOREMA V.

Tab. X. Fig. 130. 379. *Pyramides & Coni ſuper eadem baſi & ejusdem altitudinis ſunt æquales.*

DE-

DEMONSTRATIO.

Sit ACB unum e triangulis, quibus terminatur pyramis una; ABD vero unum e triangulis, quibus terminatur altera: ducta EL ipsi AB parallela (§. 202.); erit IK=LM (§. 69.); adeoque ob CK=DM *per hypoth.* CI=DL (§. 69. *Arithm.*): EF vero & GH erunt latera planorum, quibus secantur pyramides basibus suis parallelorum. Jam cum sit △ CEF ∽ △ CAB & △ DGH ∽ △ DAB (§. 207.); erit CI : CK = EF : AB & DL : DM = GH : AB (§. 306.). Sed CI=DL & CK=DM, *per demonstr.* Ergo EF : AB = GH : AB (§. 117. *Arith.*), consequenter EF=GH (§. 126. *Arithm.*). Jam si pyramides secantur planis basi parallelis, plana sectionum basi similia sunt (§. 364.), consequenter planum, cujus latus est EF, erit ad basin ut EF^2 ad AB^2 & planum, cujus latus est GH, erit ad eandem basin ut GH^2 ad AB^2 (§. 309.). Quare cum $EF^2 = GH^2$ *per demonstr.* planum, cujus latus est EF & planum, cujus latus est GH, ad basin eandem rationem habent (§. 118. *Arithm.*), consequenter plana ista inter se æqualia sunt (§. 126. *Arithm.*). Igitur & disci quantumlibet exiguæ crassitiei in eadem a basi distantia inter se æquantur (§. 371.). Quoniam itaque

ob

ob æquales altitudines *per hypoth.* ex una pyramide tot diſci ſecari poſſunt, quot ex altera; pyramis una alteri æqualis ſit neceſſe eſt (§. 66. *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Quodſi triangula ACB & ADB fuerint ſectiones triangulares conorum; erunt EF & GH diametri circulorum baſi communi parallelorum (§. 359.). Cum adeo diametri adeoque circuli iſti æquales ſint, eodem, quo ante, modo demonſtratur, conos æquales eſſe. *Quod erat alterum.*

THEOREMA VI.

380. *Priſma triangulare in tres pyramides æquales dividi poteſt.*

DEMONSTRATIO.

Tab. X. Fig. 131.

Quoniam planum ACB parallelum plano DFE (§. 347.), pyramides ABCF & DFEA habent altitudinem eandem atque baſes ACB & DFE æquales (§. 348.). Sunt ergo æquales (§. 379.). Similiter cum BEFC ſit parallelogrammum (§. 348.), △CFB=△BFE (§. 259.). Habent adeo pyramides ACBF & BEFA æquales baſes. Quoniam vero hæ baſes in eodem ſunt plano, quod per ſe patet, & verticem communem in A habent, pyramides iſtæ eandem quoque altitudinem habent, conſequenter

ter æquales sunt (§. 379.). Quamobrem tres istæ pyramides inter se æquantur (§. 87. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

381. Pyramis triangularis est tertia pars prismatis super eadem basi & ejusdem altitudinis.

COROLLARIUM II.

382. Et quoniam multangulare quodvis in triangularia resolvi potest, quælibet pyramis est pars tertia prismatis super eadem basi & ejusdem altitudinis (§. 135. *Arithm.*).

COROLLARIUM III.

383. Quia conus pro pyramide infinitangula haberi potest & cylindrus pro prismate infinitangulo, conus pars tertia est cylindri super æquali basi & ejusdem altitudinis.

THEOREMA VII.

Tab. IX. Fig. 125.

384. *Superficies coni recti seclusa basi æqualis est triangulo, cujus basis peripheria, altitudo latus coni.*

DEMONSTRATIO.

Si arcus LM infinite parvus adeoque a recta non differens; triangulum KLM pro rectilineo recte habetur, cumque angulus K sit infinite parvus; anguli L & M a rectis non differunt (§. 187.), est-

eſtque adeo KM ad LM perpendicularis (§. 66.), conſequenter trianguli KML altitudo (§. 101.). Sed coni recti ſuperficies in innumera iſtiusmodi triangula inter ſe æqualia reſolvitur (§. 358. 196.). Ergo integra coni recti ſuperficies æqualis eſt triangulo, cujus altitudo lateri, baſis peripheriæ coni æqualis (§. 299.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

385. Superficies coni recti æquatur ſectori circuli latere coni tanquam radio deſcripti, cujus arcus peripheriæ coni æqualis (§. 318.), adeoque ad ſuam peripheriam eam rationem habet, quam ſemidiameter baſis ad latus coni (§. 316. *Geom.* & 117. *Arithm.*).

PROBLEMA V.

386. *Metiri ſuperficiem ac ſoliditatem pyramidis & coni.*

RESOLUTIO.

Quæratur ſoliditas priſmatis vel cylindri eandem cum pyramide vel cono baſin habentis (§. 375. 378.), inventaque per 3. dividatur: quotus erit ſoliditas pyramidis vel coni (§. 382. 383.).

E. gr. Si ſoliditas priſmatis fuerit 67010328‴, ut in probl. (§. 375.). erit ſoliditas pyramidis 22336776‴. Si ſoliditas cylindri fuerit 605592960‴ ut in probl.

probl. (§. 378.) ; erit solitidas coni 201864320''.

Superficies pyramidis habetur, si tam basis ABC, quam triangulorum lateralium ACD, CBD, BDA areæ investigentur (§. 302.) atque in unam summam colligantur. Tab. IX. Fig. 119.

Coni denique recti superficies prodit, peripheria baseos in latus ejus dimidium ducta (§. 384.) & basi, qui circulus est, eidem addita.

E. gr. Sit diameter coni NM=56' ; erit peripheria 17584''', basis 246176'' (§. 328.) Sit altitudo KL=246'. Quoniam LM=$\frac{1}{2}$ NM=28' & $KM^2 = KL^2 + LM^2$ = 60516 +784=61300' (§. 319.); erit KM=2475'' (§. 190. *Arithm.*), consequenter superficies coni seclusa basi 2176020'' & hinc integra 2422196''. Tab. IX. Fig. 116.

PROBLEMA VI.

387. *Metiri superficiem ac soliditatem coni truncati; datis ejus altitudine CH & diametris basium AB & CD.* Tab. X. Fig. 133.

RESOLUTIO.

1. Datis diametris basium CD & AB inveniantur peripheriæ (§. 328.).
2. Ad quadratum altitudinis CH addatur quadratum differentiæ radiorum AH & ex aggregato extrahatur radix (§. 190. *Arithm.*), ut habeatur latus AC (§. 319.).

3. Semmisumma peripheriarum multiplicetur per latus AC.

Productum erit superficies coni truncati seclusis basibus.

Sit e. gr. AB=8′, CD=6′, CH=10′; erit AH=1′

$$\begin{array}{r} 100—314—8' \\ 8 \\ \hline 2512'' \text{ periph, maj.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} CH^2=100' \\ AH^2=\ \ 1 \\ \hline AC^2=101 \end{array}$$

Ergo AC=1005‴ fere.

$$\begin{array}{r} 100—314—6' \\ 6 \\ \hline 1884'' \text{ Periph. min.} \\ 2512 \text{ Periph. maj.} \\ \hline 4396 \text{ Summa.} \\ \hline 2198 \text{ Semisumma.} \\ 1005 \text{ AC} \\ \hline 10990 \\ 219800 \\ \hline 2°20'89''90''' \text{ Superfic. coni trunc.} \end{array}$$

DEMONSTRATIO.

Tab. X. Fig. 133. n. 1, n. 2

Superficies coni truncati relinquitur, si superficies coni minoris ECD a superficie majoris AEB subtrahitur. Sed superficies minoris æquatur triangulo, cujus basis HI peripheria diametro CD de-

defcripta, altitudo MK, latus EC: fuperficies majoris vero triangulo, cujus bafis NO peripheria diametro AB defcripta, altitudo ML, latus AE (§. 384.). Cum vero prior fit pars pofterioris; illa ex hac fubtracta, relinquitur pro fuperficie coni truncati trapezium parallelarum bafium HION, cujus quidem bafes HI & NO peripheriis diametris CD atque AB defcriptis æquales funt, altitudo KL vero latus AC exiftit. Habetur igitur fuperficies coni truncati, feclufis bafibus, femifumma dictarum peripheriarum in AC ducta (§. 310.). *Q. e. d.*

II. Demiffa ex C perpendiculari CH ad diametrum AB, cum etiam fit axis EF ad eandem in cono recto perpendicularis (§. 358.), erunt CH & EF parallelæ (§. 200.). Quamobrem cum bafes CD & AB fint parallelæ *per hypoth.* erunt femidiametri CG & AF parallelæ, confequenter CG = HF & CH = FG (§. 69.).

Soliditatem adeo coni truncati inventurus.

1. Inferat (§. 207.): ut differentia femidiametrorum AH ad altitudinem coni truncati CH; ita femidiameter major AF ad altitudinem coni integri FE, per probl. (§. 215. *Arithm.*) inveniendam.

2. Ex hac inventa ſubducat altitudinem coni truncati GF, ut relinquatur altitudo ablati EG.
3. Quærat ſoliditatem conorum CED & AEB (§. 386.).
4. Denique illam ex hac auferat; reſidua erit ſoliditas coni truncati ACDB.

E. gr. Sint omnia, ut ante; erit FE=40′, & hinc EG=30′.

Periph. major	2512‴
$\frac{1}{4}$ AB	200‴
Baſis maj.	502400″
EF	4000‴
	2009600000″
3	
Conus AEB	669866666″ $\frac{2}{3}$
Periph. min.	1884‴
$\frac{1}{4}$ CD	150‴
	94200
	1884
Baſi min.	282600‴
$\frac{1}{3}$ EG	1000‴
Con. CED	282600000
Con. AEB	669866666 $\frac{2}{3}$
Con. trunc.	387266666 $\frac{2}{3}$

THEOREMA VIII.

388. *Sphæra æquatur pyramidi, cujus baſis æqualis ſuperficiei, altitudo autem radio ſphæræ.*

DE-

Demonstratio.

Concipiatur ſuperficies ſphæræ in quadratula infinite exigua reſoluta, quæ a planis non amplius diſſident, & ex centro concipiantur ad eorum angulos ductæ rectæ. Evidens eſt ſphæram conſtare ex innumeris pyramidibus quadratis in centro coëuntibus, quorum altitudines a radiis differunt quantitate inaſſignabili, hoc eſt, revera nulla, baſes vero ſimul ſumtæ ſuperficiei ſphæræ æquantur. Tota igitur ſphæra recte habetur pro pyramide, cujus baſis ſuperficies, altitudo radius ſphæræ. *Q. e. d.*

Theorema IX.

389. *Sphæra eſt ad cylindrum ſuper æquali baſi & ejusdem altitudinis ut* 2 *ad* 3. Tab. X. Fig. 132.

Demonstratio.

Si quadratum ABCD cum quadrante DBC & triangulo ADC inſcripto circa latus DC gyretur, ipſum quidem cylindrum (§. 356.) quadrans hemiſphærium (§. 360.), triangulum conum (§. 358.) deſcribit. Altitudo horum corporum cum eadem ſit, nempe DC (§. 101.); ſi ea in diſcos quantumlibet exiguæ craſſitiei ſecentur, numerus eorum in omnibus idem erit. Sit jam EH ſemidiameter unius diſci cylindri; erit EG ſemidia-

meter diſci reſpondentis in hemiſphærio, EF ſemidiameter diſci in cono. Cum vero hi diſci ſint circuli, quod ex geneſi patet (§. 110.); erunt ipſi inter ſe ut quadrata rectarum EH, EG & EF (§. 313.), hoc eſt, cum ſit ob parallelismum EH & CB *per hypoth.* EH=CB (§. 258.) =CG (§. 32, atque ob CD : DA=EC: EF (§. 207.) & CD=DA (§. 84.), EC =EF, ut quadrata rectarum CG, EG & EC. Quare ſi diſcum coni a diſco cylindri ſubtrahas, relinquitur diſcus ſphæræ (§. 319.). Idem cum valeat de ſingulis diſcis ex reliquis diviſionibus emergentibus, ſoliditas ſphæræ relinquetur, ſoliditate coni ex ſoliditate cylindri ſubducta. Eſt vero Conus $\frac{1}{3}$ Cylindri (§. 383.). Ergo ſphæra duas ejusdem partes tertias continet. *Q. e. d.*

THEOREMA X.

390. *Cubus diametri eſt ad ſphæram propemodum ut* 300 *ad* 157.

DEMONSTRATIO.

Si diameter ſphæræ 100, cubus ejus 1000000 (§. 368.) & cylindrus eandem cum ſphæra baſin & altitudinem habens 785000 (§. 378.), conſequenter ſphæra 1570000 : 3 (§. 389.). Eſt itaque cubus diametri ad ſphæram ut 1000000 ad 1570000 : 3, hoc eſt, ut 300 ad 157 (§. 130. 127. *Arithm.*). *Q. e. d.*

SCHO-

SCHOLION.

391. *Dico, cubum diametri esse ad sphæram propemodum ut* 300 *ad* 157. *In demonstratione enim assumitur ratio prope vera diametri ad peripheriam* 100 : 314. (§. 326.)

THEOREMA XI.

392. *Superficies sphæræ est quadrupla circuli radio sphæræ descripti.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam sphæra æqualis est pyramidi, cujus basis est superficies, altitudo radius sphæræ (§. 388.) superficies ejus habetur, si soliditas per tertiam semidiametri, aut sextam diametri partem dividitur (§. 386.). Est vero soliditas sphæræ factum ex $\frac{2}{3}$ circuli maximi in diametrum (§. 389. 378.). Quare si hoc factum per $\frac{1}{6}$ diametri dividas, seu, quod perinde est, primum per diametrum, ut quotus sint $\frac{2}{3}$ circuli maximi, hoc est, circuli circa diametrum sphæræ descripti (§. 144. *Arithm.*), & deinde per $\frac{1}{6}$ (§. 142. 144. *Arithm.*) erit quotus $\frac{12}{3}$ circuli maximi (§. 168. *Arithm.*), hoc est, quadruplus circuli maximi (§. 153. *Arithm.*). Sed idem est superficies sphæræ, *per demonstrata.* Ergo sphæræ superficies circuli maximi quadrupla *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

393. Area circuli maximi est factum ex peripheria ejus in quartam diametri partem (§. 328.). Ergo quadruplum hujus circuli est factum ex peripheria in diametrum. Superficies ergo sphæræ habetur, peripheria in diametrum ducta, consequenter rectangulo æqualis est, cujus basis peripheria circuli radio sphæræ descripti, altitudo diameter sphæræ (§. 289.).

PROBLEMA VII.

394. *Data diametro sphæræ, invenire superficiem ac soliditatem ejus.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur peripheria circuli radio sphæræ describendi (§. 328.).
2. Inventa ducatur in diametrum. Factum est superficies sphæræ (§. 393.)
3. Hoc si porro multiplicetur per sextam diametri partem; prodibit sphæræ soliditas (§. 388. 386.).

E. gr. Sit diameter 5600‴; erit
Periph. Circuli 17584‴

Diam.	5600
	10550400
	87920
Superf. Sphær.	984704″|00
	56 0″
	5908224 0
	4923520
	55143424 0

```
 15      4
551434240 ( 91°905'706'' 2/3 Sol. Sphær.
 66666666
```

Aliter.

1. Quæratur cubus diametri 17561 6000'' (§. 368.).
2. Inveniatur porro ad 300, 157 & cubum inventum 175616000'' numerus quartus proportionalis 91905706 $\frac{2}{3}$ (§. 215. *Arith.*), qui erit soliditas sphæræ (§. 390.).

Problema VIII.

395. *Metiri soliditatem ac superficiem quinque corporum regularium.*

Resolutio.

Cubi soliditas investigatur per probl. (§. 375.). Tetraëdrum cum sit pyramis & Octaëdrum pyramis geminata, Icosaëdrum vero ex viginti pyramidibus triangularibus, Dodecaëdrum ex duodecim quinquangularibus constet, quadrum bases in superficie icosaëdri & dodecaëdri sunt, vertices in centro coëunt (§. 362. 365.); horum corporum soliditas habetur per probl. (§. 386.). Superficies eorundem prodit, si area figuræ unius ex terminantibus ipsa quæratur (§. 302. & 312.) & inventa per numerum, a quo corpus denominatur, multiplicetur, nempe pro tetraëdro per

4, pro hexaëdro seu cubo per 6, pro octaëdro per 8, pro dodecaëdro per 12 pro icosaëdro per 20 (§. 365.).

PROBLEMA IX.

Tab. X. Fig. 134. 396. *Corporis irregularis cujuscunque soliditatem invenire.*

RESOLUTIO.

1. Immittatur corpus parallelepipedo cavo eique aqua aut arena superfundatur & altitudo aquæ seu arenæ AB notetur.
2. Corpore extracto, observetur denuo aquæ aut arenæ complanatæ altitudo AC.
3. Subtrahatur AC ex AB, ut relinquatur BC.
4. Quoniam corpus irregulare æquatur parallelepipedo, cujus basis EBDH, altitudo BC; ejus soliditas invenietur per probl. (§. 372.).

Sit e. gr. AB 8'. AC 5'; erit BC 3'. Sit porro DB 12', BE 4'; erit soliditas corporis 144'.

SCHOLION.

397. *Quodsi corpus in aqualiculo istiusmodi commode deponi nequeat, e. gr. si statuam certo loco affixam dimetiri jubeamur; prisma quadrangulare aut parallelepipedum circa ipsum construi debet ex asseribus. Reliqua peragenda sunt ut ante.*

PRO-

PROBLEMA X.

398. *Invenire ſoliditatem corporis cavi.*

RESOLUTIO.

Caſus I. Si corpus cavum in numero Geometricorum non contineatur, reſolutio eadem, quæ problematis præcedentis (§. 396.).

Caſus II. Si corpus cavum fuerit parallelepipedum, priſma, cylindrus, ſphæra, pyramis vel conus; ſoliditas primum totius corporis cavitate incluſa, dein cavitatis, quæ eandem cum corpore figuram habere ſupponitur, per methodos ſupra traditas (§. 372. 375. 378. 386. 394.) inveniatur: hac enim ex iſta ſubducta, relinquitur ſoliditas corporis cavi.

Tab. X. Fig. 129.

Sit e. gr. ſoliditas cylindri cavi AB, CD invenianda, ſitque diameter totius corporis AB 56″, longitudo AC 2° 4′ 6″; erit ſoliditas cylindri incluſa cavitate 605′ 592″ 960‴. Sit diameter cavitatis 500‴; erit ſoliditas 482′ 775″ 000‴: quæ ex ſupra inventa ſubducta relinquit ſoliditatem corporis cavi 122′ 817″ 960‴.

CAPUT III.

DE SIMILITUDINE AC RATIONE SOLIDORUM.

THEOREMA XII.

399. *Corpora ſimilia ſunt, quorum plana terminantia & numero æqualia & ſimilia exiſtunt.*

DEMONSTRATIO.

Cum corpora ex planorum terminantium concurſu gigni poſſe concipiamus; eodem modo determinantur, ſi plana terminantia & numero æqualia fuerint & ſimilia (§. 105.). Sunt igitur & ipſa ſimilia (§. 106.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

Tab. X. Fig. 128.

400. Quoniam in planis ſimilibus latera homologa ſunt proportionalia (§. 148.). erit AB: BD=*ab* : *bd* & DB : BG=*db* : *bg*. Quamobrem ex æquo AB: BG=*ab* : *bg* (§. 138. *Arithm.*). Cum adeo ſit AB: *ab*=BD: *bd* & AB; *ab* =BG: *bg* (§. 122. *Arithm.*); corporum ſimilium longitudines AB & *ab*, latitudines DB & *db*, itemque altitudines BG & *bg* in eadem ratione exiſtunt.

Co-

COROLLARIUM II.

401. Cubus ſex quadratis æqualibus terminatur (§. 351.). Sunt vero quadrata omnia ſimilia (§. 84. 148.). Ergo cubi omnes ſunt ſimiles (§. 399.).

COROLLARIUM. III.

402. Quoniam corpora regularia planis regularibus, adeoque ſimilibus (§. 92. 148.) & ejusdem quidem ſpeciei numero æqualibus (§. 365.) terminantur; corpora quoque regularia ejusdem ſpeciei ſimilia ſunt (§. 399.).

COROLLARIUM IV.

403. Omnia igitur Tetraëdra omnia quoque Octaëdra, Dodecaëdra & Icoſaëdra ſimilia ſunt (§. 365.).

THEOREMA XIII.

404. *Cylindrorum & Conorum ſimilium altitudines ſunt ut radii baſium; axes ſunt itidem ut radii baſium & iis ſub eodem angulo junguntur.*

DEMONSTRATIO.

Tab. IX. Fig. 116. & 118.

Si Coni & Cylindri ſimiles ſunt, ea in iisdem eadem ſunt, per quæ a ſe invicem diſcerni poſſunt (§. 19. *Arithm.*). Patet vero Conos & Cylindros non poſſe diſtingui niſi per rationem axis CF vel KL ad diametrum baſis DE vel NM atque angulum CFE vel KLM, quem ef-

ficit

ficit axis cum diametro (§. 356. 358.). Axes igitur in Conis & Cylindris similibus ad diametros basium eandem rationem habent & ad eas similiter inclinantur, seu ad eundem angulum insistunt. *Quod erat unum.*

Cum in figuris solidis perinde ac in planis (§. 101.) altitudo sit recta ex vertice in basin ad angulos rectos ducta; in Conis & Cylindris rectis axes sunt altitudines (§. 356. 358.), adeoque patet *per demonstrata* altitudines tum esse diametris basium proportionales. Et quoniam in cæteris altitudines in triangulis rectangulis subtendunt eosdem angulos obliquos, sub quibus nempe axes ad diametros inclinantur; ideo axibus (§. 206.), consequenter etiam diametris basium (§. 117. *Arithm.*) proportionales sunt. *Quod erat alterum.*

THEOREMA XIV.

Tab. IX. Fig. 120.

405. *Omnis sphæra est alteri similis.*

DEMONSTRATIO.

Omnem semicirculum esse alteri similem patet ex demonstratione theorematis 1. part. 1. (§. 112.). Sed sphæra describitur semicirculo K circa diametrum AB gyrato (§. 360.): omnes igitur sphæræ eodem modo determinantur (§. 105.), adeoque similes sunt (§. 106.). *Q. e. d.*

THEO-

THEOREMA XV.

406. *Omnia prismata, parallelepipeda, cylindri, pyramides & coni sunt in ratione composita basium & altitudinum.*

DEMONSTRATIO.

Sunt enim ut facta ex basibus in altitudines (§. 372. 375. 378. 386. *Geom.* & §. 127. *Arithm.*) : ergo in ratione composita basium & altitudinum (§. 116. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

407. Quare si bases fuerint æquales, altitudinum; si altitudines, basium rationem habent (§. 130. *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

408. Cylindrorum & conorum bases sunt circuli (§. 356. 358.). Circuli sunt in ratione duplicata diametrorum (§. 314.). Ergo cylindri & coni quicunque sunt in ratione composita ex simplici altitudinum & duplicata diametrorum (§. 406. & si fuerint æquæ alti, ut quadrata diametrorum (§. 407.).

COROLLARIUM III.

409. Quare si in cylindris altitudo fuerit diametro basium æqualis; erunt in ratione triplicata diametrorum basium (§. 116. *Arithm.*).

THEOREMA XV.

410. *Corpora ſimilia, priſmata, parallelepipeda, cylindri, pyramides atque coni ſunt in ratione triplicata homologorum laterum; itemque altitudinum.*

DEMONSTRATIO.

Sunt enim in ratione compoſita baſium & altitudinum (§. 406.). Sed baſes ſunt in ratione duplicata homologorum laterum (§. 309. 314.) & altitudines lateribus baſium homologis proportionales ſunt (§. 400.). Ergo corpora ipſa in ratione triplicata laterum homologorum itemque altitudinum, exiſtunt (§. 116. *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA XVII.

411. *Sphæræ ſunt ut cubi diametrorum.*

DEMONSTRATIO.

Tab. VII, Fig. 90. Sit circulo DAEB quadratum GFIH circumſcriptum. Quodſi ſemicirculus AEB cum quadrato dimidio AGHB circa axem communem AB in orbem moveatur, ille ſphæram, hoc cylindrum deſcribet, cujus altitudo AB diametro baſis IH æqualis (§. 360. 356.). Quare ſi ponamus circulum adhuc alium cum quadrato ſimiliter circumſcripto; quoniam ex theorematis 1. part 1. demonſtra-

ſtratione conſtat (§. 112.), omnem ſemicirculum eſſe alteri ſimilem & AB ad BH utrobique eſt ut 2 ad 1, adeoque rectangulum unum alteri ſimile (§. 148.); inde generabitur ſphæra & cylindrus alteri ſimilis (§. 105. 106.). Cum adeo ea utrobique coincidant, per quæ a ſe invicem diſtingui debebat, quod in utroque caſu gignitur (§. 19. *Arithm.*); erit cylindrus unus ad ſuam ſphæram ut alter ad ſuam; conſequenter ſphæræ ſunt inter ſe ut iſti cylindri (§. 122. *Arithm.*). Habent ergo rationem triplicatam diametrorum (§. 409.), hoc eſt ut cubi earundem exiſtunt (§. 173. *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA XVIII.

412. *Æqualia parallelepipeda, priſmata, cylindri, coni & pyramides reciprocant baſes & altitudines.*

DEMONSTRATIO.

Si enim hæc corpora fuerint æqualia, facta ex baſibus in altitudinem æqualia ſunt (§. 372. &c.). Quamobrem altitudo corporis A eſt ad altitudinem alterius B, uti reciproce baſis ipſius B ad baſin ipſius A (§. 212. *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA XIX.

413. *Cylindrus, cujus altitudo æqualis eſt diametro baſeos, eſt ad cubum diametri ut 785 ad 1000.*

DEMONSTRATIO.

Si diameter AB 100; erit basis 7850 (§. 328.). Et quoniam altitudo DC =AB, *per hypoth.* soliditas cylindri 785000 (§. 378.). Sed cubus diametri AB=1000000 (§. 368.). Ergo cylindrus ad cubum diametri ut 785 ad 1000 (§ 130. *Arithm.* *Q. e. d.*

ELE-

ELEMENTA
ANALYSEOS MATHEMATICÆ.

CAPUT I.
DE ALGEBRA AD GEOMETRIAM ELEMENTAREM APPLICATA.

PROBLEMA I.

414. *Problema Geometricum algebraice resolvere.*

RESOLUTIO.

1. Observentur ea omnia, quæ in probl. (§. 357. *Arithm.*) fieri præcepimus
2. Cum vero rarissime ad æquationem eodem modo in problematis geometri-

cis perveniatur, quo in numericis usi sumus; hic ulterius quædam peculiaria notanda sunt. Nempe.

α) Concipiatur jam factum, quod ad faciendum proponitur.

β) Omnium linearum in schemate depictarum relationes, nullo habito discrimine inter cognitas & incognitas, excutiantur, ut appareat, quomodo aliæ ab aliis dependeant, seu quibus datis, aliæ una dentur, sive per triangula similia (§. 148.), sive per rectangula (§. 327.), sive per alia (quod tamen raro fieri solet) theoremata.

γ) Ut igitur triangula similia & rectangula obtineas, sæpius producendæ sunt lineæ, donec vel directe, vel indirecte datis fiant æquales, vel alias secent, sæpius lineæ parallelæ atque perpendiculares ducendæ, sæpius puncta quædam connectenda, sæpius anguli datis æquales construendi: quæ fieri posse, ex Geometria elementari manifestum est. Eum in finem probe tenenda sunt theoremata de æqualitate angulorum & similitudine triangulorum (§. 132. 154. 166. 170. 182. 206. 207. 208. 251.

δ). Quodsi in æquationem non satis concinnam incideris; alio adhuc modo excutiendæ sunt linearum relationes, ac interdum sufficit, non directe quæ-

rere

rere eam, quæ quæritur, sed aliam, qua data ipsa quoque innotescit.

ε) Reductione æquationis facta ex ultima, quæ prodit, elicienda est constructio geometrica variis quidem modis pro diversitate æquationum.

PROBLEMA II.

415. *Æquationem simplicem construere.*

RESOLUTIO.

Omne artificium in eo consistit ut fractiones, quibus quantitas incognita æqualis, in terminos proportionales resolvantur: id quod exemplis rectius ostenditur, quam multis regulis docetur.

1. Sit nempe $x = \frac{ab}{c}$; erit $c : a = b : x$ (§. 215. *Arithm.*). Reperietur adeo x (§. 209.)

2. Sit $x = \frac{abc}{de}$, fiat $d : a = b : \frac{ab}{d}$. Hæc quarta proportionalis inventa (§. 209.) dicatur g; erit $x = \frac{gc}{e}$: quæ adeo ut in casu primo invenitur.

3. Sit $x = \frac{aa - bb}{c}$. Quoniam $aa - bb = (a+b)(a-b)$ erit $c : a+b = a-b : x$ (§. 215. *Arithm.*).

4. Sit $x = \frac{a^2 b - bcc}{ad}$. Invenitur *per casum* 1

$g = \frac{ab}{d} = \frac{a^2 b}{ad}$ & $h = \frac{bc}{d}$, ut sit $\frac{bcc}{ad} = \frac{bc}{a}$; denique *per casum* I. $i = \frac{bc}{a}$: erit $x = g - i$, differentia nempe linearum g & i. *Brevius*: Fiat $a : a + c = a - c : g$ *per cas.* 3. & $d : g = b : \frac{bg}{d}$, *per cas.* I, quæ erit x.

5. Sit $x = \frac{ab}{c} + \frac{adc}{be}$. Inveniatur ut in casu præcedente $g = \frac{ab}{c}$ & $f = \frac{adc}{be}$: erit $x = g + f$, summa linearum g & f.

6. Sit $x = \frac{a^2 b + bad}{af + cg} = \frac{ab + bd}{f + cg : a} = \frac{(a+d)b}{f + cg : a}$. Quæratur $\frac{cg}{a}$ & fiat $f + \frac{cg}{a} = h$; erit $f + h : a + d = b : x$, consequenter $x = \frac{(a+d)b}{f+h}$. Reductus adeo est casus præsens ad primum.

7. Sit $x = \frac{a^2 b - bad}{af + bc}$. Quæratur $\frac{af}{b}$ & fiat $\frac{af}{b} = h$, erit $x = \frac{a(a-d)}{h+c}$, consequenter $h + c : a - d = a : x$.

Tab. XI. Fig. 135. 8. Sit $x = (a^2 + b^2) : c$. Construatur triangulum ABC cujus crus AB $= a$, BC $= b$, (§. 151.); erit AC $= \sqrt{(a^2 + b^2)}$, (§. 319.). Dicatur AC $= m$, erit $a^2 + b^2 = m^2$, adeoque $x = \frac{m^2}{c}$, consequenter $c : m = m : x$.

9. Sit

9. Sit $x = \frac{a^2 - b^2}{c}$. Super AB=a describatur semicirculus & in eo applicetur AC=b. Cum triangulum ACB sit rectangulum(§.241.); erit CB=$\sqrt{(a^2-b^2)}$, (§. 319.). Dicatur CB =m: erit $x = m^2 : c$, consequenter $c : m = m : x$.

Tab. XI. Fig. 136.

10. Sit $x = \frac{a^2 b + bcd}{af + bc} = \frac{a^2 + cd}{c + af : b}$. Inferatur $b : a = f : \frac{fa}{b}$ & fiat $\frac{fa}{b} = h$: erit $x = \frac{a^2 + cd}{h + c}$. Quæratur inter AC=$c$ & CB=d media proportionalis CD=$\sqrt{cd}$. (§. 249.) Fiat CE = a; erit DE = $\sqrt{(a^2 + cd)}$. Dicatur hæc m: erit $x = \frac{m^2}{h + c}$, consequenter $h + c : m = m : x$.

Tab. XI. Fig. 137

PROBLEMA III.

416. *Æquationem quadraticam geometrice construere.*

RESOLUTIO.

Cum æquationes quadraticæ ad simplices reduci possint (§. 358. *Arithm.*) ipsas quoque *per probl.* præced. (§. 415.) construere licet.

Tab. XI. Fig. 137.

Sit enim æquatio pura $x^2 = ab$; erit $a : x = x : b$, (§. 211. *Arithm.*). Invenitur adeo $x = \sqrt{ab}$, si inter AC=a & BC=b quæratur media proportionalis DC (§. 249.). Si

 æqua-

æquatio affecta $x^2 . ax = b^2$; erit $x = \frac{1}{2}a . V \frac{1}{4} a^2 . b^2)$, hoc eſt, vel $x = \frac{1}{2}a + V(\frac{1}{4}a^2 + b^2)$, vel $x = V(\frac{1}{4}a^2 + b^2) - \frac{1}{2}a$, vel $x = \frac{1}{2}a + (V\frac{1}{4}a^2 - b^2,)$ vel $x = \frac{1}{2}a - V(\frac{1}{4}a^2 - b^2)$. Omne igitur artificium conſtruendi has æquationes huc redit, ut inveniatur valor ipſius $V(\frac{1}{4}a^2 + b^2)$, itemque ipſius $V(\frac{1}{4}a^2 - b^2)$. Utrumque vero jam docuimus in problemate præcedente. Nimirum ſi in triangulo rectangulo fiat AB $= \frac{1}{2}a$ & BC $= b$; erit AC $= \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$ (§. 319.). Sed ſi ſuper AB $= \frac{1}{2}a$ deſcribatur ſemicirculus & in eo applicetur AC $= b$; erit CB $= V(\frac{1}{4}a^2 - b^2)$, ut in problemate præcedente demonſtratum.

Tab. XI. Fig. 135.

Fig. 136.

PROBLEMA IV.

Tab. XI. Fig. 135.

417. *Data perimetro* AB + BC + CA *& area trianguli rectanguli, invenire hypotenuſam.*

Sit AB + BC + CA $= a$, AC $= x$, area $= b^2$, erit BC + BA $= a - x$

Jam cum ſit $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (§. 319.) & $AB^2 + BC^2 = (AB + BC)^2 - 2AB . BC$ (§. 183. *Arithm.*): erit $AC^2 = (AB + BC)^2 - 2AB . BC$ (§. 65. *Arithm.*). Eſt vero $AC^2 = x^2$ & $(AB + BC)^2 = a^2 - 2ax + x^2$, $2AB . BC = 4b^2$ (§. 302.). Quare

$$x^2 = a^2 - 2ax + x^2 - 4b^2$$

$$2ax = a^2 - 4b^2$$

$$x = \tfrac{1}{2}a - 2b^2 : a$$

Æqua-

Æquatio secunda in hanc resolvitur analogiam:

$$2a : a+2b = a-2b : x$$

seu $\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}a+b = \frac{1}{2}a-b : x$ (§. 134. *Arithm.*). Habetur adeo

Theorema. In omni triangulo rectangulo est ut dimidia perimeter ad compositam ex dimidia perimetro & quadrati latere, quod triangulo æquale, ita differentia hujus lateris a perimetro dimidia ad hypothenusam.

PROBLEMA V.

418. *Datam rectam* AB *media & extrema ratione secare in* C, *hoc est, ut sit* AB : AC = AC : CB.

Tab. XI. Fig. 138.

Sit $AB=a$, $AC=x$; erit $CB=a-x$, consequenter per conditionem problematis

$$a : x = x : a-x$$

$$x^2 = a^2 - ax \text{ (§. 210. } Arith.)$$

$$x^2 + ax = a^2$$

$$x^2 + ax + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{5}{4}a^2$$

$$x + \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}$$

$$x = \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} - \tfrac{1}{2}a$$

Constructio. 1. Jungantur $AB=a$ & BD $=\frac{1}{2}a$ ad angulos rectos; erit $AD=\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$. 2. Fiat $DF=\frac{1}{2}a$ & $AF=AC$; erit $AC=x$.

Tab. XI. Fig. 139. Alia ex æquatione tertia elicitur constructio. Nimirum radio $AC = \frac{1}{2}a$ describatur circulus & in A erigatur perpendicularis $AB = a$. Si enim porro ducatur BD per centrum C; erit $ED = a$ & $BE = x$. Quare si fiat BF=BE: recta AB erit in F media & extrema ratione secta. Etenim $BD = a + x$, adeoque $BE. BD = ax + x^2$, consequenter $ax + x^2 = a^2$.

PROBLEMA VI.

Tab. XI. Fig. 140. 419. *Rectam datam* AC *utcunque divisam in* B *iterum secare in* D, *ita ut sit* AD:DC=DC:BD.

Sit $AB = a$ $\quad BD = x$

$BC = b$ $\quad$ erit $DC = b - x$

$AD = a + x$

Quare per conditionem problematis

$$a + x : b - x = b - x : x$$

$$ax + x^2 = b^2 - 2bx + x^2$$

$$ax + 2bx = b^2$$

$$x = b^2 : (a + 2b)$$

Invenitur adeo x ob analogiam $a + 2b : b = b : x$. (§. 210.)

PRO-

PROBLEMA VII.

420. *Datam rectam* AC *divisam in* B *denuo secare in* D, *ita ut sit* CB : DB = DA : AB.

Tab. XI. Fig. 140.

Sit CB = a DB = x
BA = b erit DA = $b+x$

Quare per conditionem problematis

$$a:x=b+x:b$$
$$ab=bx+x^2$$
$$\tfrac{1}{4}b^2 \quad \tfrac{1}{4}b^2 \qquad (\S.\ 358.\ Arithm.)$$
$$\tfrac{1}{4}b^2+ab=\tfrac{1}{4}b^2+bx+x^2$$
$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2+ab)}=\tfrac{1}{2}b+x$$
$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2+ab)}-\tfrac{1}{2}b=x$$

Constructio. Inter EG = b & GF = a quæratur media proportionalis HG, quæ erit = $\sqrt{ab}$. Fiat GI = $\tfrac{1}{2}b$ & ducatur HI: erit PI = $\sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2+ab)}$. Fiat denique KI = GI: erit KH = $\sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2+ab)}-\tfrac{1}{2}b$. (§. 249. 252.)

Tab. XI. Fig. 142.

DEFINITIO I.

421. Si quatuor fuerint *lineæ* proportionales, extremæ mediis, mediæ extremis *reciprocæ* dicuntur.

PROBLEMA VIII.

422. *Datam rectam* AB *ita secare in* C. *ut partes* AC & CB *sint duabus datis* DE & FG *reciprocæ.*

Tab. XI. Fig. 141.

Sit

Sit $AB = a$ $\quad AC = x$
$DE = b$ $\quad CB = a - x$
$FG = c$

Ergo (§. 421.).

$$x : b = c : a - x$$
$$ax - x^2 = cb$$
$$-cb = x^2 - ax$$
$$\tfrac{1}{4}aa \quad \tfrac{1}{4}aa \quad (\text{§. 358. Arithm.})$$
$$\tfrac{1}{4}aa - cb = \tfrac{1}{4}a^2 - ax + x^2$$
$$V(\tfrac{1}{4}a^2 - cb) = \tfrac{1}{2}a - x$$
$$= x - \tfrac{1}{2}a$$
$$x = \tfrac{1}{2}a \pm V(\tfrac{1}{4}aa - cb)$$

Tab. XI. Fig. 144. *Constructio.* Quæratur inter $HI = b$ & $IK = c$ media proportionalis $MI = Vcb$ (§. 249.). Radio $IL = \tfrac{1}{2}a$ deſcribatur arcus & ducatur PM ipſi IK parallela (§. 202.): erit $NM = x$ & $MP = a - x$. Nam demiſſo ex centro L perpendiculo LO, erit $NO = OP$ (§. 225.) & $OL = MI = V\,cb$. Sed $NL = LI$ (§. 32.) $= \tfrac{1}{2}a$. Ergo $NO = \sqrt{(\tfrac{1}{4}aa - cb)}$ (§. 319.), conſequenter ob $MO = IL = \tfrac{1}{2}a$, $MN = \tfrac{1}{2}a - V(\tfrac{1}{4}aa - cb) = x$ & $PM. = \tfrac{1}{2}a + V(\tfrac{1}{4}aa - cb) = a - x$.

COROLLARIUM.

423. Conſtruere ergo æquationem quadraticam affectam $ax - x^2 = cb$ idem eſt ac datis duabus rectis c & b, vel ſi $c = b$, eidem rectæ b reciprocas x & $a - x$ invenire.

PRO-

PROBLEMA IX.

424. *Datis duabus rectis DE & FG reciprocas invenire, quarum differentia sit datæ rectæ AC æqualis.* Tab. XI. Fig. 141.

Sit DE$=a$ Reciproca minor$=x$

FG$=b$ erit major$=c+x$
AC$=c$

Ergo (§. 421.)

$$x:a=b:c+x$$
$$ab=cx+x^2$$
$$\tfrac{1}{4}cc \qquad \tfrac{1}{4}cc$$
$$\tfrac{1}{4}cc+ab=\tfrac{1}{4}cc+cx+x^2$$
$$V(\tfrac{1}{4}cc+ab)=\tfrac{1}{2}c+x$$
$$V(\tfrac{1}{4}cc+ab)-\tfrac{1}{2}c=x$$

Constructio. Quæratur inter AC$=b$ & CB$=a$ media proportionalis DC. Fiat CE $=\frac{1}{2}c$: erit DE$=V(\frac{1}{4}cc+ab)$. Unde si subtrahitur $\frac{1}{2}c=$EF, relinquitur DF$=x$. Tab. XI. Fig. 137.

COROLLARIUM.

425. Construere ergo æquationes quadraticas $x^2+cx=ab$ & $x^2-cx=ab$ idem est ac datis duabus rectis a & b, vel, si $a=b$, eidem rectæ b reciprocas, ibi x & $x+c$, hic x & $x-c$ reperire.

PRO-

PROBLEMA X.

Tab. XI. Fig. 141 426. *Datam rectam AB ita secare in C ut rectangulum sub tota AB & segmento minore AC æquale sit rectangulo sub majore CB & differentia utriusque CB—AC.*

Sit $AB = a$. $AC = x$
erit $CB = a - x$
$CB - AC = a - 2x$

Quare per conditionem problematis

$$ax = a^2 - 3ax + 2x^2$$
$$-a^2 = -4ax + 2x^2$$
$$\overline{}\ 2$$
$$-\tfrac{1}{2}a^2 = x^2 - 2ax$$
$$a^2 \qquad a^2$$
$$\tfrac{1}{2}a^2 = x^2 - 2ax + a^2$$
$$\sqrt{\tfrac{1}{2}a^2} = a - x$$
$$x + \sqrt{\tfrac{1}{2}a^2} = a$$
$$x = a - \sqrt{\tfrac{1}{2}a^2}$$

Constructio. Quæratur inter $\frac{1}{2}a$ & a media proportionalis, quæ erit pars major $a-x$, adeoque subducta ex a relinquit minorem x.

PROBLEMA XI.

Tab. XI. Fig. 143. 427. *Dato radio circuli ED invenire latus trigoni regularis ipsi inscribendi AB.*

Du-

Ducatur latus hexagoni EB, & sit BD=EB (§. 274.)=a, AB=x; erit BF =$\frac{1}{2}x$ (§. 225.). Et quoniam anguli ad F recti (*per §. cit.*) BE=BD *per demonstr.* BF=BF: erit EF=FD (§. 184.)=$\frac{1}{2}a$. Quare (§. 319.) $BD^2 - DF^2 = FB^2$, hoc est

$$\frac{3}{4}aa = \frac{1}{4}x^2$$
$$3aa = x^2$$
$$\sqrt{3aa} = x$$

Est ergo x media proportionalis inter $3a$ & a. Et si fiat $a=1$, erit $x=\sqrt{3}$.

COROLLARIUM I.

428. Si dato latere trigoni regularis b inveniri debet radius circuli circumscribendi y; erit $3y^2=b^2$, consequenter $y=\sqrt{\frac{1}{3}b^2}$, quae est media proportionalis inter $\frac{1}{3}b$ & b.

PROBLEMA XII.

429. *Dato ratio circuli AE invenire latus octogoni regularis circulo inscribendi.* Tab. XI. Fig. 145.

Sit AE=r, AF=y; erit latus quadrati AB=$\sqrt{2r^2}$ (§. 319.) & AG=$\sqrt{\frac{1}{2}r^2}$ (§. 225.). Porro cum AEF=45° (§. 264.), & angulus ad G rectus (§. 225.) erit quoque EAG=45° (§. 188.), consequenter EG=AG (§. 198.) =$\sqrt{\frac{1}{2}r^2}$. Hinc FG=$r-\sqrt{\frac{1}{2}r^2}$. Quare (§. 319.)

$$yy = \frac{1}{2}r^2 + 1\frac{1}{2}r^2 - rV2r^2$$

hoc est $yy = 2r^2 - rV2r^2$

$$y = V(2r^2 - rV2r^2)$$

Quod si fiat $r = 1$; erit $y = V\ (2 - V2)$.

PROBLEMA XIII.

Tab. XI. Fig. 145. 430. *Dato latere Octogoni AF invenire radium circuli circumscribendi AE.*

Sit AF $= b$, AE $= y$, erit (§. 429.)

$$b^2 = 2y^2 - V2y^4$$

$$V2y^4 = 2y^2 - b^2$$

$$2y^4 = 4y^4 - 4b^2y^2 + b^4$$

$$0 = 2y^4 - 4b^2y^2 + b^4$$

$$0 = y^4 - 2b^2y^2 + \frac{1}{2}b^4$$

$$\frac{1}{2}b^4 \qquad \frac{1}{2}b^4 \quad (\text{§. 183. Arithm.})$$

$$\frac{1}{2}b^4 = y^4 - 2b^2y^2 + b^4$$

$$bV\frac{1}{2}b^2 = y^2 - b^2$$

$$b^2 + bV\frac{1}{2}b^2 = y^2$$

$$V(b^2 + bV\frac{1}{2}b^2) = y$$

Est igitur $b : y = y : b + V\frac{1}{2}b^2$ (§. 134. 127. Arithm.)
conseq. $\frac{1}{2}b : y = y : 2b + 2V\frac{1}{2}b^2$

Hinc elicitur sequens geometrica.

Tab. XI. Fig. 146. *Constructio.* Super latere octogoni AB $= b$ describatur semicirculus & ex centro C eri-

gatur.

gatur perpendicularis indefinita CF, erit recta $DB=\sqrt{\frac{1}{2}b^2}$ (§. 319.). Fiat $AE=2b+2b\sqrt{\frac{1}{2}b^2}$, descriptoque semicirculo AFE; erit $AF=\sqrt{(b^2+b\sqrt{\frac{1}{2}b^2})}$, (§. 252.), consequenter radius circuli octogono circumscribendi: quod adeo super recta AB construetur, si radio AF describatur circulus transiens per A & B.

PROBLEMA XIV.

431. *Dato radio circuli AC invenire latus decagoni regularis inscribendi AB.* Tab. XI. Fig. 149.

Quoniam AB est $\frac{1}{10}$ totius peripheriæ, angulus ACB=36° (§.45. 47.), consequenter ob AC=BC (§. 32.), ABC =CAB=72° (§. 194.), adeoque DAC =108 (§. 126.). Fiat AD=AC, erit ADC=ACD=36° (§. 194.), consequenter DCB=72°. Sunt ergo triangula ABC & BDC æquiangula & hinc BD: BC=BC: AB (§. 206.).

Sit jam $AC=BC=a$, $AB=x$; erit $BD=a+x$, consequenter *per demonstrata.*

$$\frac{a+x : a = a : x}{ax+x^2=a^2}$$

Est ergo a media & extrema ratione secanda, cujus pars major x (§. 418.). Vel radio a quærendæ sunt reciprocæ $a+x$ & x (§. 425.).

Theorema. Latus decagoni regularis circulo inſcripti eſt pars major radii media & extrema ratione ſecti.

Tab. XI. Fig. 148. *Conſtructio*. Quoniam $x = V\frac{5}{4}a^2 - \frac{1}{2}a$ (§.418.) radio a deſcribatur circulus & in centro E erigatur perpendicularis IE$=a$. Fiat EF $=\frac{1}{2}a$; erit FI$=\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$. Quare ſi ex F radio IF deſcribatur arcus KI; erit KE$=\sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{1}{2}a$.

SHOLION.

432. *Hanc ipſam conſtructionem tradit* Ptolomæus *in ſuo Almageſto*.

PROBLEMA XV.

Tab. XI. Fig. 149. 433. *Dato latere decagoni regularis circulo deſcribendi* AB, *invenire radium* AC.

Sit AB$=a$, AC$=x$; erit BD$=a+x$ & *per demonſtrata in probl. præc.*

$$a+x : x = x : a$$
$$ax + a^2 = x^2$$
$$a^2 = x^2 - ax$$
$$\tfrac{5}{4}a^2 = x^2 - ax + \tfrac{1}{4}a^2$$
$$V\tfrac{5}{4}a^2 = x - \tfrac{1}{2}a, \text{ ob } x > \tfrac{1}{2}a \text{ (§. 431.)}$$
$$\tfrac{1}{2}a + V\tfrac{5}{4}a^2 = x$$

Con-

Constructio. Construatur triangulum rectangulum MLN, in quo $ML = a$ & $MN = \frac{1}{2}a$: erit $LN = \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ (§. 319.). Producatur MN in O, donec $NO = LN$: erit $MO = x$. Ex centro itaque O per M circulus describi potest.

Tab. XI. Fig. 147.

PROBLEMA XVI.

434. *Dato radio circuli* AE *& latere decagoni* AF *invenire latus pentagoni* AB.

Tab. XI. Fig. 145.

Sit $AE = a$ $\quad AB = x$

$AF = b$ $\quad AG = \frac{1}{2}x$ (§. 225.).

$GE = \sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)}$

$FG = a - \sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)}$

Quare (§. 319.)

$$b^2 = \frac{1}{4}x^2 + a^2 - 2a\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)} + a^2 - \frac{1}{4}x^2$$

$$b^2 = 2a^2 - 2a\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)}$$

$$2a\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)} = 2a^2 - b^2$$

$$4a^4 - a^2x^2 = 4a^4 - 4a^2b^2 + b^4$$

$$-a^2x^2 = -4a^2b^2 + b^2$$

$$4a^2b^2 - b^4 = a^2x^2$$

$$4b^2 - (b^4 : a^2) = x^2$$

Est vero $b = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{1}{2}a$ (§. 431.)

$$b^2 = \frac{6}{4}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$$

$$b^4 = \frac{14}{4}a^4 - 3a^3\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$$

Ergo $x^2 = \frac{24}{4}a^2 - 4a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} - (\frac{14}{4}a^4 - 3a^3\sqrt{\frac{5}{4}a^2}) : a^2 = \frac{24}{4}a^2 - 4a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{14}{4}a^2 + 3a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} = \frac{10}{4}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} = a^2 + \frac{6}{4}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} = a^2 + b^2$.

Con-

Tab. XI. Fig. 148. *Constructio.* Quæratur latus Decagoni EK (§. 431.) erit KI latus pentagoni

Theorema : Latus pentagoni regularis potest latera hexagoni & decagoni eidem circulo inscriptorum simul.

SCHOLION.

435. *Eandem prorsus constructionem dedit* Ptolomæus.

PROBLEMA XVII.

Tab. XII. Fig. 150. 436. *Datis pro triangulo rectangulo* BAC *hypothenusa* BC *&* *differentia crurum* DC *invenire crura.*

Sit $BC=c$, $DC=f$, $\frac{1}{2}(AB+AC)=x$; erit $AC=x+\frac{1}{2}f$, $AB=x-\frac{1}{2}f$ (§. 360. *Arithm.*), consequenter (§. 319.).

$$2x^2+\frac{1}{2}f^2=c^2$$

$$2x^2=c^2-\frac{1}{2}f^2$$

$$x^2=\frac{1}{2}c^2-\frac{1}{4}f^2$$

$$x=\sqrt{(\frac{1}{2}c^2-\frac{1}{4}f^2)}$$

Constructio. Construatur rectangulum triangulum AFE, in quo $AF=FE=\frac{1}{2}c$, erit $AE=\sqrt{\frac{1}{2}cc}$. Super AE describatur semicirculus ob AF=FE transiturus per F & in eo applicetur $EG=\frac{1}{2}f$; erit $AG=x$, consequenter si fiat DG=GC=GE, crus majus AC, minus AD=AB.

PROBLEMA XVIII.

Tab. XII. Fig. 151. 437. *Triangulo dato* HLI *æquale & alteri dato* NOP *simile construere.*

Sit

Sit HI$=f$, LM$=e$, NP$=m$, QO $=n$, basis trianguli quæsiti$=y$, altitudo $=z$: erit

(§. 306.) $m:n=y:z$ — $mz=ny$

(§. 302.) $fe=zy$ — $fe:y=z$

$$mfe:y=mz$$

$$ny=mfe:y$$

$$ny^2=mfe$$

$$y^2=mfe:n$$

$$y=\sqrt{(mfe:n)}$$

Constructio. Producatur altitudo OQ trianguli NOP in M, donec altitudini alterius LM æqualis fiat. Producantur itidem crura trianguli in R & S, & per M agatur ipsi NP parallela: erit RS $= me:n$. Quæratur inter RS & SI$=f$ media proportionalis TS $=\sqrt{(mfe:n)}$, super qua ob angulos N & P datos triangulum TSV construi potest. (§. 203.).

PROBLEMA XIX.

438. A *dato puncto* E *ducere rectam, quæ circulum datum tangat.*

Tab. XII. Fig. 152.

Quia punctum E positione, circulus GDFG & positione, & magnitudine

 da-

datur; dantur etiam EG & GC. Sit itaque EG$=a$, GC$=b$, ED$=x$; erit EF $=a+2b$ &.

$$a+2b: x=x: a \text{ (§. 256.)}$$
$$aa+2ab=x^2$$
$$\sqrt{(aa+2ab)}=x$$

Constructio. Connectantur centrum circuli C & punctum datum E recta ED. Super ea describatur semicirculus CDE ducanturque chordæ CD & DE; erit D rectus (§. 241.). Est vero $CE^2=aa+2ab+bb$, $CD^2=bb$: ergo MN$=\sqrt{(2ab+aa)}=x$ (§. 319.).

PROBLEMA XX.

Tab. XII. Fig. 153. 439. *Data diagonali pentagoni regularis* AD, *invenire latus pentagoni* AE.

Sit AE$=x$, AD$=a$. Quoniam mensura anguli AEF est arcus AB (§. 238.) & anguli EFA mensura dimidius arcus AE cum arcu dimidio CD (§. 240.). hoc est, itidem arcus AB (§. 264. erit angulus AEF = AFE (§. 119.) adeoque AF=AE (§. 198.) $=x$ & hinc FD$=a-x$. Porro anguli AED mensura est arcus AB$+\frac{1}{2}$ BC (§. 238.) & ipsius F mensura AB $+\frac{1}{2}$ BC (§. 240.) & angulus ADE utrique triangulo ADE & EFD communis. Quare (§. 206.).

AD

$$AD : ED = ED : FD$$

$$a : x = x : a - x$$

$$a^2 - ax = x^2$$

$$a^2 = x^2 + ax$$

Est adeo x pars major ipsius a media & extrema ratione sectæ (§. 418.).

COROLLARIUM.

440. Quodsi A $D = x$, $ED = a$, reperietur $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$. Unde patet, quomodo ex dato latere diagonalis inveniatur.

PROBLEMA XXI.

441. *Invenire circulum superficiei cylindri æqualem.*

Sit ratio radii ad peripheriam $r : p$; peripheria cylindri $= p$, altitudo a; erit superficies $= ap$ (§. 377.). Sit radius circuli $= x$; erit $r : p = x : \frac{px}{r}$, quæ est ejusdem peripheria (§. 326.). Unde habemus (§. 328.).

$$px^2 : 2r - ap$$

$$\overline{}\; 2r$$

$$px^2 = 2rap$$

$$\overline{}\; p$$

$$x^2 = 2ar$$

$$x = \sqrt{2ar}$$

Theorema. Superficies cylindri æquatur circulo, cujus radius eſt medius proportionalis inter diametrum & altitudinem cylindri.

PROBLEMA XXII.

442. *Invenire cylindrum, cujus ſuperficies ſit circulo dato æqualis.*

Sit circuli radius $=r$, peripheria $=p$, altitudo cylindri $=x$, radius baſis $=y$; erit peripheria ejus $py:r$ (§. 326.), conſequenter (§. 377.).

$$pyx:r=\tfrac{1}{2}pr$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad}\,r$$
$$pyx=\tfrac{1}{2}pr^2$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad}\,p$$
$$yx=\tfrac{1}{2}r^2$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad}\,y$$
$$x=r^2:2y$$

Eſt adeo problema indeterminatum, ita ut radius pro arbitrio aſſumi poſſit, vel, quod perinde eſt altitudo.

PROBLEMA XXIII.

443. *Data diametro ſphæræ & altitudine cylindri ipſi æqualis, invenire diametrum cylindri.*

Sit diameter ſphæræ $=d$, altitudo cylindri $=a$, diameter ejus $=x$, ratio diametri ad peripheriam $=b:c$; erit ſoliditas ſphæræ $=cd^3:6b$ (§. 394.). et ſoliditas

tas cylindri$=ac\,x^2:4b$ (§. 378.). Quare per conditionem problematis:

$$cd^3:6b=acx^2:4b$$

$$4d^3=6ax^2$$

$$2d^3:3a=x^2$$

$$\sqrt{(2d^3:3a)}=x$$

Æquatio penultima in hanc analogiam

$$3a:2d=d^2:x^2$$

resoluta sequens suppeditat

Theorema: Quadratum diametri sphæræ est ad quadratum diamatri cylindri ipsi æqualis ut tripla cylindri altitudo ad diametrum sphæræ duplam.

CAPUT II.

DE ALGEBRA AD SECTIONES CONICAS APPLICATA.

DEFINITIO II.

444. *Sectiones conicæ* sunt lineæ curvæ, quæ ex coni sectione oriuntur.

SCHOLION

445. *Sectiones conicæ præter circulum sunt tres* Parabola, Hyperbola & Ellipsis.

DEFINITIO III.

Tab. XII. Fig. 154.

446. *Diameter* curvæ est recta AD rectas MM inter se parallelas bifariam secans in P. In specie *Axis* secatur, si rectas æquidistantes ad angulos rectos secet.

DEFINITIO IV.

447. *Vertex Curvæ* est punctum A, ex quo ducitur diameter.

DEFINITIO V.

448. *Ordinatim applicatæ* sunt lineæ æquidistantes MM, quæ a diametro bifariam secantur. Earum dimidiæ PM vocantur *semiordinatæ*.

DEFINITIO VI.

449. *Abscissa* AP est pars diametri vel alterius lineæ, ad quam curva refertur, inter verticem aut aliud punctum fixum & semiordinatam PM intercepta. Quidam *sagittam* vocant.

DEFINITIO. VII.

Tab. XII. Fig. 156

450. *Diameter transversa* AB est recta, quæ utrinque intra curvas conti-

nua

nuata rectas intra easdem æquidistantes MM bifariam secat.

DEFINITIO VIII.

451. *Diameter conjugata* est recta, quæ alteri diametro æquidistantes bifariam secat.

DEFINITIO IX.

452. *Quantitates variabiles* sunt, quæ crescentibus aliis vel decrescentibus aut crescunt, aut decrescunt. E. gr. semiordinata PM & abscissa AP circuli sunt quantitates variabiles: hac enim crescente crescit etiam vel descrescit altera. *Quantitates constantes* sunt, quæ crescentibus aliis vel decrescentibus eædem manent. Ita semidiameter circuli AC est quantitas constans: crescentibus enim abscissis & semiordinatis AP & PM semper eadem manet.

Tab. XII. Fig. 155.

HYPOTHESIS I.

453. *Quantitates constantes primis alphabeti litteris indigitentur* a, b, c, *&c. variabiles vero ultimis* z, y, x, *&c. Speciatim* x *abscissam*, y *semiordinatam denotet, nisi aliud expresse moneatur.*

DEFINITIO X.

454. *Curva algebraica* est, in qua relatio abscissarum AP ad semiordinatas per æquationem algebricam explicari potest Sit e. gr. in circulo AB$=a$, AP$=x$,

Tab. XII. Fig. 155.

PM

PM $=y$, erit PB$=a-x$, conſequenter ob $PM^2=AP.BP$ (§. 249. 291.), $y^2=ax-x^2$. Vel ſit PC$=x$, AC$=a$, P M$=y$: erit (§. 319.) $MC^2-PC^2=PM^2$, hoc eſt, $a^2-x^2=y^2$.

DEFINITIO XI.

455. *Parabola* eſt curva, in qua $ax=y^2$, hoc eſt quadratum ſemiordinatæ æquatur rectangulo ex abſciſſa in rectam conſtantem quæ axis *Parameter*, ab aliis *Latus rectum* dicitur.

COROLLARIUM I.

456. Eſt ergo in ea $x=y^2:a$ atque $a=y^2:x$, hoc eſt, abſciſſa eſt tertia proportionalis ad parametrum & ſemiordinatam, parameter vero tertia proportionalis ad abſciſſam & ſemiordinatam.

COROLLARIUM II.

457. Porro $\sqrt{ax}=y$, hoc eſt ſemiordinata eſt media proportionalis inter parametrum & abſciſſam.

COROLLARIUM III.

Tab. XIII. Fig. 162.

458. Data itaque parametro AB deſcribi poteſt parabola. Continuetur enim parameter AB in C & in B erigatur perpendicularis infra lineam AC continuanda in N. Ex centris ad libitum aſſumtis circino usque ad A aperto ducantur arcus, rectam BV in I, II, III, IV; V &c. rectam vero BC in 1, 2,

3,

3, 4, 5 &c. interſecantes: erunt B 1, B 2, B 3, B 4, B 5 &c. abſciſſæ, BI, BII, BIII, BIV: BV; &c. ſemiordinatæ (§. 249. Quare ſi lineæ B 1, B 2, B 3 &c. ex recta BC in BN transferantur & in punctis 1, 2, 3 &c. normales applicentur 1I = BI, 2 II = BII, 3 III = BIII &c. curva per puncta I. II. III &c. tranſiens parabola eſt; BN vero ejus axis (§. 457.).

COROLLARIUM IV.

Tab. XII. Fig. 162.

459. Quodlibet etiam punctum parabolæ geometrice determinari poteſt. E. gr. quæritur, utrum punctum M ſit in parabola, nec ne. Demittatur ex M ad BN perpendicularis PM & fiat PN parametro AB æqualis. Super BN deſcribatur ſemicirculus. Quodſi enim is tranſeat per M; erit punctum M in parabola (249. 457.).

DEFINITIO XII.

Tab. XII. Fig. 157.

460. *Focus* eſt punctum axis F, in quo ſemiordinata FN æquatur ſemiparametro.

PROBLEMA XXIV.

461. *Invenire diſtantiam Foci a vertice AF.*

Sit AF = x, parameter = a, erit FN = $\frac{1}{2}a$ (§. 460.), conſequenter.

$\frac{1}{4}a^2$

$$\frac{1}{4}a^2 = ax \quad (\S.\ 455.)$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \; a$$
$$\frac{1}{4}a = x$$

Theorema. In parabola diſtantia foci a vertice AF eſt ad parametrum in ratione ſubquadrupla, ſeu quarta pars parametri.

COROLLARIUM I.

462. Quoniam $y^2 = ax$ (§. 455.): quadratum ſemiordinatæ PM eſt quadruplum rectanguli ex diſtantia foci a vertice in abſciſſam $= \frac{1}{4} ax$ ſive AF. AP.

COROLLARIUM II.

463. Invenitur adeo diſtantia foci a vertice AF, ſi ad abſciſſam quamcunque AP & dimidiam ſemiordinatam $\frac{1}{2}$ PM quæratur tertia proportionalis (§. 210.). Eſt enim $\frac{1}{4}$ PM^2 = AP. AF (§. 291.), conſequenter $PM^2 = 4$ AF. AP.

PROBLEMA XXV.

Tab. XII. Fig. 157. 464. *Determinare quantitatem rectæ FM ex foco F ad extremitatem ſemiordinatæ M ductæ.*

Sit $AP = x$. Quoniam $AF = \frac{1}{4}a$ (§. 461.), erit $PF = x - \frac{1}{4}a$ vel $\frac{1}{4}a - x$, ſi AF > PA conſequenter

$$PF^2 = x^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2$$
$$PM^2 = \quad ax \quad (\S.\ 455.)$$
$$\overline{FM^2 = x^2 + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2} \quad (\S.\ 319.)$$
$$FM = x + \frac{1}{4}a.$$

Theo-

Theorema. RectaM F ex foco F ad extremitatem semiordinatae parabolae ducta aequatur aggregato ex abscissa AP & distantia foci a vertice AF.

COROLLARIUM. I.

465. Si quarta pars parametri ex A in f & F transfertur & per AD parallelae quotcunque ipsi in punctis P normales MM aguntur, tandemque ex F intervallo P f puncta M determinantur; curva per haec puncta transiens est parabola. Tab. XIII. Fig. 158.

COROLLARIUM. II.

466. Potest ergo parabola etiam continuo motu describi. Nimirum assumta recta pro axe fiat $fA = AF = \frac{1}{4}a$. In A firmetur regula DB secans axem fD ad angulos rectos. Extremitati regulae alterius EC alligetur filum altero sui extremo in foco F fixum, quod sit $=$AD$+$AF. Quodsi stylo ad regulam EC applicato regula EC juxta ductum alterius DB dextrorsum & dein sinistrorsum promoveatur; stylus parabolam designabit. Est enim constanter FM $=$ EM $=$ Pf $= x + \frac{1}{4}a$, consequenter punctum M in parabola (§. 464.).

PROBLEMA XXVI.

467. *Invenire rationem semiordinatarum in Parabola.*

Sint abscissae x & v, semiordinatae y & z; erit $y^2 = ax$ & $z^2 = av$ (§. 455.), consequenter

y^2

$$y^2 : z^2 = ax : av$$
$$y^2 : z^2 = x : v \text{ (§. 348. Arithm.)}$$
$$y : z = \sqrt{x} : \sqrt{v}$$

Theorema: Quadrata femiordinatarum funt inter fe ut abfciffæ: ipfæ autem femiordinatæ in ratione fubduplicata abfciffarum.

PROBLEMA XXVII.

Tab. XII. Fig. 175.

468. *Determinare quantitatem rectanguli ex fumma duarum femiordinatarum* PM + pm *in differentiam earundem* R*m*.

$$\text{PM} + pm = \sqrt{ax} + \sqrt{av} \quad \text{(§. 457.)}$$
$$m\text{R} = \sqrt{av} - \sqrt{ax}$$
$$(\text{PM} + pm)m\text{R} = av - ax = a\,(v - x)$$
$$= a.\ \text{P}p.$$

Theorema. Rectangulum ex fumma duarum femiordinatarum in differentiam earundem æquatur rectangulo ex parametro in differentiam abfciffarum.

COROLLARIUM.

469. Eft ergo parameter ad fummam duarum femiordinatarum, ut earundem differentia ad differentiam abfciffarum (§. 212. *Arithm.*).

PROBLEMA XXVIII.

Tab. XIII. Fig. 158.

470. *Determinare quantitatem chordæ* AM.

Si Parameter $= a$, AP $= x$ erit PM^2 $= ax$ (§. 455.). Quare cum AP$^2 = x^2$; erit

erit $AM^2 = ax + x^2$ (§. 319.), $= (a+x) x = (a + AP) AP$.

Theorema. In parabola chorda est media proportionalis inter abscissam & compositam ex parametro & abscissa.

DEFINITIO XIII.

471. SI TM curvam tangit in M, ducatur MR ad tangentem normalis; recta PT inter tangentem TM & semiordinatam PM intercepta *Subtangens* vocatur: quæ vero inter semiordinatam & normalem intercipitur PR, *Subnormalis* audit.

Tab. XIII. Fig. 159.

COROLLARIUM.

472. Est adeo TMR triangulum rectangulum (§. 77.), adeoque ob PM ad AR normalem (§. 251. 206.), $PR : PM = PM : PT$ & $PM : PT = MR : TM$, hoc est, in omni curva subnormalis est tertia proportionalis ad subtangentem & semiordinatam, & normalis est ad tangentem ut semiordinata ad subtangentem.

PROBLEMA XXIX.

473. *Determinare quantitatem subtangentis PT, & subnormalis PR in Parabola.*

Per punctum contactus M ducatur secans DS; & ex punctis M & S semiordinatæ PM, US; & MQ ipsi AU parallela. Sit $AP = x$, $PM = UQ = y$, MQ

Tab. XIII. Fig. 159.

$=$ PU $= m$, QS $= n$. Erit abſciſſa AU $= x+m$, & ſemiordinata US $= y+n$; adeoque.

$$ax+am=y^2+2ny+n^2 \quad (\S.\ 455.)$$

Et ob $ax=y^2$) $am=2ny+n^2$

Si jam ſecans DS circa punctum M eo moveri concipiatur donec illa in tangentem TM degeneret, quantitates TD, MQ & QS reſpectu reliquarum evaneſcent; conſequenter in æquatione ultima quadratulum n^2 reſpectu $2ny$ pro nihilo habendum: hinc $am=2ny$ & $m = 2ny : a =$ QM.

Eſt vero SQ : QM = MP : (PT+TD)

Hoc eſt, $n : \frac{2ny}{a} = y :$ (PT+TD) (§. 207.)

Ergo PT+TD=PT+o=PT=$2ny^2 : an = 2y^2 : a = 2ax : a = 2x$.

Porro PT : PM=PM : PR (§. 472.)

Hoc eſt, $2x : y=y :$ PR

Ergo PR $= \frac{y^2}{2x} = ax : 2x = \frac{1}{2}a$.

Theorema. In parabola ſubtangens PT eſt abſciſſæ AP dupla; ſubnormalis vero PR parametri ſubdupla, adeoque conſtans.

COROLLARIUM. I.

474. Quoniam TA $= x$ & diſtantia foci a vertice AF $= \frac{1}{4}a$ (§. 461; erit TF $= \frac{1}{4}a + x$. Ergo recta FM ex foco F ad punctum contactus M ducta æquatur rectæ TF (§. 464.).), conſequenter TFM triangulum æquicrurum.

Co-

COROLLARIUM II.

475. Quoniam PA=x & AF=$\frac{1}{4}a$ (§. 461.), erit PF=$x-\frac{1}{4}a$, consequenter cum sit PR=$\frac{1}{2}a$ (§. 473.) FR=$x+\frac{1}{4}a$, adeoque FR=FM (§. 464.)=TF (§. 474.). Circulus igitur ex foco parabolæ F per punctum ejus M. ductus subtangentem PT & subnormalem PR determinat, consequenter punctum T, ex quo ducitur tangens TM.

COROLLARIUM III.

476. Quodsi MN ducatur parallela axi AR, erit angulus NMT=FTM. (§. 182.). Cumque sit TF=FM (§. 474.); erit FTM =FMT (§. 155.), consequenter FMT =NMT (§. 65. *Arithm.*).

DEFINITIO XIV.

477. *Ellipsis* est linea curva, in qua quadratum semiordinatæ PM est ad rectangulum ex segmentis axis AP & PB ut parameter ad axem, hoc est, si AB=a, parameter=b, PM=y, AP=x, erit $b:a=y^2:ax-x^2$ adeoque $ay^2=abx-bx^2$.

Tab. XIII. Fig. 160.

COROLLARIUM I.

478. Est ergo $y^2=bx-bx^2:a$, hoc est, quadratum semiordinatæ æquatur rectangulo ex parametro in abscissam, demto tamen alio rectangulo ex eadem abscissa in quartam pro-

portionalem ad axem, parametrum & abſciſſam.

COROLLARIUM II.

479. Fiat $y=0$, erit $bx-bx^2:a=0$, adeoque $abx=bx^2$, conſequenter $a=x$. Patet adeo curvam ſecare AB in A & B, conſequenter in ſe redire.

COROLLARIUM III.

480. Fiat $x=\frac{1}{2}a$. Erit $y^2=\frac{1}{2}ab-a^2b:4a$ $=\frac{1}{4}ab$, conſequenter $y=CD=\sqrt{\frac{1}{4}ab}$. Ergo $DE=2\sqrt{\frac{1}{4}ab}=\sqrt{ab}$, hoc eſt axis minor ED eſt medius proportionalis inter majorem AB & parametrum, conſequenter parameter tertia proportionalis ad axem majorem & minorem.

COROLLARIUM IV.

481. Quia $ay^2=abx-bx^3$

erit $bx^2=abx-ay^2$

$$bx^2:(bx-y^2)=a$$

Invenitur ergo axis, parametro, abſciſſa & ſemiordinata, datis, ſi fiat 1. $b:y=y:\frac{y^2}{b}$, 2. $x-\frac{y^2}{b}=\frac{(bx-y^2)}{b}:x=x:a$.

Tab. XIII. Fig. 161. Nimirum ſit axis AB poſitione datus & parameter AL ad eum perpendicularis. Datis abſciſſa AP & ſemiordinata PM, fiat $AN=AQ=PM$; ducta NF ipſi LQ parallela, erit $AF=y^2:b$, conſequenter $FP=x-y^2:b$.

Con-

Continuetur LA in G, factaque AH=FP & AG=AP ducatur GB ipsi HP parallela; erit $AB = bx^2 : (bx - y^2)$, adeoque axis quæsitus.

COROLLARIUM V.

482. Quia $ay^2 = abx - bx^2$ erit $ay^2 : (ax - x^2) = b$ consequenter 1. $x : y = y : \frac{y^2}{x}$ & 2. $a - x : \frac{y^2}{x} = a : b$.

Tab. XIII. Fig. 163.

Datis ergo axe AB, abscissa AP & semiordinata PM, ita invenitur parameter AG. 1. Fiat AI=PM & ex A per M. ducatur recta AL. 2. In I erigatur perpendicularis LI; erit (§. 207.) ob AP:PM=AI:LI, LI $= y^2 : x$, 3. producatur PM in O, donec PO=LI$= y^2 : x$, & ex B per O ducatur recta BG. 4. In A excitetur perpendicularis GA=(ob BP:PO=BA:GA) $ay^2 : (ax - x^2)$: quæ erit parameter AG.

COROLLARIUM VI.

483. $y = \frac{V(abx - bxx)}{Va} = \frac{V(bx(a - x))}{Va}$. Datis itaque axe AB & parametro AG, cuilibet abscissæ BP semiordinata PN assignatur, si parametro AG axi AB ad angulos rectos juncta ducatur GB & erecta perpendiculari PN, fiat PL=PH, tandemque super AL semicirculus describatur. Est enim

 AB

AB (a) : GA (b) = BP (x) : PH ($bx:a$) & PN $= \surd$ (AP.PL) $= V$ ($a-x$, $bx:a$) $= V$ (bx $-bx^2:a$).

PROBLEMA XXX.

Tab. XIII. Fig. 160.

484. *Invenire distantiam foci a vertice* AF.

Sit AB$=a$, parameter$=b$, AF$=x$, erit FR$=\frac{1}{2}b$ (§. 460.) &

$$\frac{1}{4}ab^2 = abx - bx^2 \quad (\text{§. } 477.)$$
$$\underline{\qquad\qquad\qquad -b}$$
$$\frac{1}{4}ab = ax - x^2$$
$$x^2 - ax = -\frac{1}{4}ab$$
$$\frac{1}{4}a^2 \qquad \frac{1}{4}a^2$$
$$x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab$$
$$\frac{1}{2}a - x = V\left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab\right)$$
$$\frac{1}{2}a - V\left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab\right) = x$$

Constructio. Ex B in L transferatur dimidia parameter, erit CL$=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$. In centro C erigatur perpendicularis CK occurrens semicirculo super AL descripto in K, erit CK $=V$ ($\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}ab$). Fiat itaque CF$=$CK; erit in F focus.

Æquatio secunda sequens suppeditat

Theorema: Si axis AB in foco F secetur; erit rectangulum ex segmentis axis AF, FB subquadruplum rectanguli ex parametro in axem seu quadrato axis dimidii minoris CD æquale.

COROL-

COROLLARIUM.

485. Diſtantia foci a centro eſt $= \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab)}$; hoc eſt, quadratum ejus eſt differentia quadratorum DC & AC.

PROBLEMA XXXI.

486. *Invenire rationem ordinatarum* PM *&* pm *in ellipſi.* Tab. XIII. Fig. 160.

Sit $AB = a$, parameter $= b$, $AP = x$, $PM = y$, $Ap = z$, $pm = v$; erit

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = bx - bx^2 : a \\ v^2 = bz - bz^2 : a \end{array}\right\} (\S.\ 478.)$$

$$\text{Ergo } y^2 : v^2 = bx - \frac{bx^2}{a} : bz - \frac{bz^2}{a}$$

h. e. $y^2 : v^2 = ax - x^2 : az - z^2$
ſeu $PM^2 : pm^2 = AP.BP : Ap.pB$

Theorema. In ellipſi quadrata ſemiordinatarum ſunt inter ſe ut rectangula ex axis ſegmentis.

COROLLARIUM I.

487. Eſt igitur etiam $DC^2 : PM^2 = CB^2 : AP.PB$, conſequenter $DC^2 : CB^2 = PM^2 : AP.PB$ (§. 122. *Arithm.*), hoc eſt quadratum axis minoris eſt ad quadratum majoris ut quadratum ſemiordinatæ ad rectangulum ex axis ſegmentis.

COROLLARIUM II.

488. Sit $CP=x$, erit $AP=\frac{1}{2}a-x$ & $PB=\frac{1}{2}a+x$, consequenter $AP.PB=\frac{1}{4}a^2-x^2$. Habemus adeo (§. 487.).

$$\tfrac{1}{4}ab:\tfrac{1}{4}a^2=y^2:\tfrac{1}{4}a^2-xx$$

hoc est $b:a=$

$$ay^2=\tfrac{1}{4}a^2b-bx^2$$

$$y^2=\tfrac{1}{4}ab-bx^2:a$$

En æquationem aliam, quæ naturam ellipsis definit, abscissis a centro C computatis.

COROLLARIUM III.

489. Sit $CD=d$, $AC=r$, $PC=x$, erit $AP=r-x$ & $PB=r+x$, consequenter $AP.PB=r^2-x^2=AC^2-PC^2$. Habemus ergo ut ante

$$d^2:r^2=y^2:r^2-x^2$$

unde $$r^2y^2=d^2(r^2-x^2)$$

$$y^2=d^2(r^2-x^2):r^2$$

En æquationem adhuc aliam, quæ itidem ellipsis naturam definit, abscissis denuo a centro C computatis.

COROLLARIUM IV.

490. Crescentibus adeo abscissis x, semiordinatæ decrescere debent. Quodsi tandem fiat $x=r$; erit $r^2-x^2=o$, consequenter $y^2=o$, adeoque ellipsis cum axe tandem concurrit. Unde porro intelligitur, ellipsin esse lineam in se redeuntem.

PRO-

PROBLEMA XXXII.

491. *Determinare quantitatem rectarum FM & fM ex utroque foco F & f ad idem peripheriæ punctum M ductarum.* Tab. XIII. Fig. 164.

Sint FC=fC=c, reliqua ut ante: erit PC=$\frac{1}{2}a-x$, Pf=$c+\frac{1}{2}a-x$, PF =$c-\frac{1}{2}a+x$, adeoque PF^2=$c^2-ac+\frac{1}{4}a^2+2cx-ax+x^2$, =$(\frac{1}{2}a-c)^2+2cx-ax+x^2$, P$f^2$=$c^2+ac+\frac{1}{4}a^2-2cx-ax+x^2$.=$(\frac{1}{2}a+c)^2-2cx-ax+x^2$. Est vero (§. 487.).

$$CB^2 : DC^2 = AP.PB : PM^2$$
$$\tfrac{1}{4}a^2 : \tfrac{1}{4}a^2 - c^2 = ax - xx : PM^2$$

Habemus adeo

$$PM^2 = ax - xx - \frac{4ccx}{a} + \frac{4ccxx}{aa}$$
$$PF^2 = (\tfrac{1}{2}a - c)^2 + 2cx - ax + xx$$
$$FM^2 = (\tfrac{1}{2}a - c)^2 + 2cx - \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{aa}$$
$$FM = \tfrac{1}{2}a - c + 2cx : a$$

Porro

$$PM^2 = ax - xx - \frac{4ccx}{a} + \frac{4ccxx}{aa}$$

$$Pf^2 = (\tfrac{1}{2}a + c)^2 - 2cx - ax + xx$$
$$fM^2 = (\tfrac{1}{2}a + c)^2 - 2cx - \frac{4ccx}{a} + \frac{4c^2x^2}{aa}$$

$$fM = \tfrac{1}{2}a + c - 2cx : a$$
$$FM = \tfrac{1}{2}a - c + 2cx : a$$
$$fM + FM = a = AB$$

Theorema. Summa rectarum FM & fM ex utroque foco F & f ad idem peripheriæ punctum M ductarum æquatur axi majori AB.

COROLLARIUM I.

492. Datis ergo axibus conjugatis ellipsis facillime describitur. Determinatis enim focis F & f (§. 484.), clavi in iis defigantur & his filum circumligetur FMf axi majori AB æquale. Quodsi immisso stylo filum extendatur & circa clavos circumducatur, ellipsis designabitur.

COROLLARIUM II.

493. Immo eodem modo geometrice determinatur quodlibet punctum ellipseos M. Axis enim AB dividitur pro arbitrio utcunque in duas partes, & parte una ex foco F, altera ex foco f describitur arcus: duo enim hi arcus se mutuo secabunt in puncto M. Possunt autem una eademque opera quatuor simul determinari puncta, singula nempe in singulis quadrantibus AD, DB, BE & EA.

PRO-

PROBLEMA XXXIII.

494. *Determinare ſubtangentem* PT *& ſubnormalem* PR *in Ellipſi.* Tab. XIV. Fig. 165.

Per punctum contactus M ducatur ſecans DS, & ex punctis M & S ſemi-ordinatæ PM & VS; QM vero axi parallela.

Sit axis major$=a$, parameter$=b$, AP$=x$, PM$=y$, MQ$=m$, QS$=n$; erit AU$=x+m$; & VS$=y+n$. Quoniam

$$ay^2+2any+an^2=abx+abm-bx^2-2bmx-bm^2$$
$$\& \quad ay^2=abx-bx^2 \quad (\S.\ 477.)$$

Erit $2any+an^2=abm-2bmx-bm^2$
ſeu $(2ay+an)\,n=(ab-2bx-bm)m$

Si jam ut ante (§. 473.), ſecans DS circa punctum contactus M moveri concipiatur, donec ea in tangentem TM degeneret, quantitates TD, MQ, & QS reſpectu reliquarum evaneſcent; conſequenter in æquatione ultima rectangulum an reſpectu $2ay$; & bm reſpectu $ab-2bx$ pro nihilo habendum, erit adeo

$$2ayn=abm-2bxm$$
$$\& \quad 2ayn:(ab-2bx)=m$$

Quia QS:QM$=$PM:(PT$+$TD) (§. 207.)
ſeu $n:\dfrac{2ayn}{ab-2bx}=y:(\mathrm{PT}+\mathrm{TD})$

Erit

Erit $PT+TD=PT+o=PT=\frac{2ay^2n}{abn-2bxn}$
$=\frac{2ay^2}{ab-2bx}=\left(\frac{2a}{ab-2bx}\right)\left(\frac{abx-bx^2}{a}\right)$
(§.478)$=\frac{2a^2bx-2abx^2}{a^2b-2abx}=(ax-x^2):(\frac{1}{2}a-x)$
Habemus adeo

$$\tfrac{1}{2}a-x:x=a-x:PT$$

five $PC:AP=PB:PT$

Ergo $PB.PA=CP.PT$

Theorema. In ellipſi rectangulum ex ſegmentis axis æquatur rectangulo ex diſtantia ſemiordinatæ a centro in ſubtangentem.

Porro $PT:PM=PM:PR$ (§. 472.)

Hoc eſt $\frac{2ax-2x^2}{a-2x}:y=y:PR$

Ergo $PR=\frac{(a-2x)y^2}{2ax-2x^2}=\left(\frac{a-2x}{2ax-2x^2}\right)$
$\left(\frac{abx-bx^2}{a}\right)$(§.478.)$=\frac{a^2bx-3abx^2+2bx^3}{2a^2x-2ax^2}$
$=(a^2b-3abx+2bx^2):(2a^2-2ax)$; ſed $a^2b-3abx+2bx^2=(ab-2bx)(a-x)$.
Ergo $\frac{a^2b-3abx+2bx^2}{2a^2-2ax}=\frac{(ab-2bx)(a-x)}{2a(a-x)}$
$=(\frac{1}{2}ab-bx):a$. Quæ expreſſio hanc ſuppeditat analogiam:

$$a:b=\tfrac{1}{2}a-x:PR$$

Theorema. In ellipſi eſt ut axis primus ad parametrum, ita diſtantia ſemiordinatæ a centro ad ſubnormalem.

Tan-

Tandem. $AT = PT - AP = (ax - x^2) : (\frac{1}{2}a - x) - x = (ax - x^2 - \frac{1}{2}ax + x^2) : (\frac{1}{2}a - x) = \frac{1}{2}ax : (\frac{1}{2}a - x)$ Quare

$$\frac{1}{2}a - x : \frac{1}{2}a = x : AT$$
$$PC \quad : AC = AP : AT$$

Theorema. Ut diſtantia ſemiordinatæ a centro ad axem dimidium, ita abſciſſa ad portionem ſubtangentis inter verticem ellipſis & tangentem interceptam.

COROLLARIUM I.

495. Quia $PC : AC = AP : AT$; erit $PC + AP : AC + AT = PC : AC$ (§. 135. *Arithm.*). Hoc eſt, $AC : CT = PC : AC$, ſeu $PC : AC = AC : CT$.

COROLLARIUM II.

496. Eſt ergo $AC^2 = PC.CT$ (§. 291.) hoc eſt quadratum dimidii axis AC æquatur rectangulo ex CT in PC.

DEFINITIO XV.

497. *Hyperbola* eſt linea curva, in qua $ay^2 = abx + bxx$, hoc eſt, $b : a = y^2 : ax + x^2$, ſeu quadratum ſemiordinatæ eſt ad rectangulum ex abſciſſa in rectam compoſitam ex eadem abſciſſa & recta quadam conſtante, quæ *Axis transverſus* vel *latus transverſum* audit, ut recta alia conſtans, quæ *axis Parameter* dicitur, ad axem transverſum.

COROLLARIUM

498. Eſt ergo etiam hic ut in ellipſi $y^2 = bx + bx^2 : a$, $b = ay^2 : (ax + xx)$, $a = bxx : (y^2 - bx)$ &c. niſi quod hic contraria ſigna occurrant (§. 478. & ſeqq.).

DEFINITIO XVI.

499. In hyperbola *Axis conjugatus* dicitur media proportionalis inter axem transversum & parametrum, quia talis est axis conjugatus in ellipsi (§. 480.).

DEFINITIO XVII.

Tab. XII. Fig. 156.

500. Si axis transversus AB axi AX in directum jungitur & in C bifariam dividitur; punctum C *Centrum* appellatur.

PROBLEMA XXXIV.

501. *Datis parametro & axe transverso AB, invenire distantiam foci a vertice AF.*

Sit parameter $=b$, AB $=a$, erit FN $=\frac{1}{2}b$ (§. 460. 497.).

$$b:a=\tfrac{1}{4}bb:ax+xx$$

$$\tfrac{1}{4}abb=abx+bxx$$

$$\tfrac{1}{4}ab=ax+xx$$

$$\tfrac{1}{4}aa+\tfrac{1}{4}ab=\tfrac{1}{4}aa+ax+xx$$

$$V(\tfrac{1}{4}aa+\tfrac{1}{4}ab)=\tfrac{1}{2}a+x$$

$$V(\tfrac{1}{4}aa+\tfrac{1}{4}ab)-\tfrac{1}{2}a=x$$

Invenitur adeo x quærendo inter $\frac{1}{2}a$ & $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$ mediam proportionalem ac inde auferendo $\frac{1}{2}a$.

COROLLARIUM. I.

502. Est adeo distantia foci a centro FC $=V(\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}ab)$. Quare si FC$^2=c^2$; erit CE$^2=c^2-\frac{1}{4}a^2$.

COROLLARIUM. II.

503. Quia $ax+xx=\frac{1}{4}ab$ & $ax+xx=AF.FB$, $\frac{1}{4}ab$ vero quadratum semiaxis conjugati (§. 499.); rectangulum ex AF in FB huic quadrato æquale est.

PROBLEMA XXXV

504. *Invenire rationem semiordinatarum PM & pm.* Tab. XII. Fig. 157.

Sit axis transversus $=a$, parameter $=b$, $AP=x$, $PM=y$, $Ap=v$, $pm=z$; erit (§. 498.).

$$y^2:z^2=bx+\frac{bxx}{a}:bv+\frac{bv^2}{a}$$

$$ax+xx:av+v^2 \text{ (§. 148. } Arithm.\text{)}.$$

$$(a+x)x:(a+v)v$$

Theorema. In hyperbola quadrata semiordinatarum sunt inter se ut rectangula ex abscissa in rectam quandam compositam ex abscissa & axe transverso.

COROLLARIUM

505. Crescentibus adeo abscissis x, crescunt quoque rectangula $ax+x^2$, consequenter & quadrata semiordinatarum y^2, adeoque semiordinatæ ipsæ. Hyperbola igitur continuo ab axe recedit.

PROBLEMA XXXVI.

506. *Invenire rationem axis transversi ad axem conjugatum.*

Si axis transversus $=a$, parameter $=b$, erit quadratum axis conjugati $=ab$ (§. 499.). Hoc ergo ad quadratum trans-

ver-

versi, ut ab ad aa, hoc est, ut b ad a (§. 348. *Arithm.*).

Theorema. Quadratum axis conjugati est ad quadratum transversi, ut parameter ad axem transversum.

COROLLARIUM.

Tab. XII. Fig. 156.

507. Quoniam $b : a = PM^2 : AP . PB$ (§. 497.); quadratum axis conjugati est ad quadratum transversi ut quadratum semiordinatae ad rectangulum ex abscissa in compositam ex abscissa & axe transverso (§. 117. *Arithm.*).

PROBLEMA XXXVII.

508. *Sint duae hyperbolae aequales, eandem parametrum, eundem axem transversum atque conjugatum habentes, quarum axes AX & BY cum axe transverso communi AB in directum jacent. Ex focis F & f ad punctum M hyperbolae unius ducantur rectae* fm *& FM: determinare quantitatem harum rectarum.*

Sit $FC = fC = c$, reliqua ut in praecedentibus: erit $AF = c - \frac{1}{2}a$, $Af = c + \frac{1}{2}a$, $PF = x - c + \frac{1}{2}a$, $Pf = c + \frac{1}{2}a + x$, $PF^2 = x^2 - 2cx + c^2 + ax - ac + \frac{1}{4}a^2$, $Pf^2 = c^2 + ac + \frac{1}{4}a^2 + 2cx + ax + x^2$. Jam (§. 502.) quadratum semiaxis conjugati $CE^2 = cc - \frac{1}{4}aa$. Porro (§. 507.)

$$AC^2 : CE^2 = AP . BP : PM^2$$
$$\frac{1}{4}aa : cc - \frac{1}{4}aa = ax + xx : PM^2$$

Est

Eſt itaque

$$PM^2 = -ax - xx + 4c^2x : a + 4c^2x^2 : a^2$$
$$PF^2 = x^2 - 2cx + c^2 + ax - ac + \tfrac{1}{4}a^2$$

$$FM^2 = c^2 - 2cx - ac + \tfrac{1}{4}a^2 + \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a^2}$$

$$FM = c - \tfrac{1}{2}a + 2cx : a$$

Similiter

$$PM^2 = -ax - x^2 + 4c^2x : a + 4c^2x^2 : a^2$$
$$Pf^2 = c^2 + ac + \tfrac{1}{4}a^2 + 2cx + ax + x^2$$

$$fM^2 = c^2 + ac + \tfrac{1}{4}a^2 + 2cx + \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a^2}$$

$$fM = c + \tfrac{1}{2}a + 2cx : a$$
$$FM = c - \tfrac{1}{2}a + 2cx : a$$

$$fM - FM = a = AB$$

COROLLARIUM I.

Tab. XIV. Fig. 166.

509. Datis ergo axe transverſo & diſtantia foci a vertice, hyperbola motu continuo ita deſcribitur. Scilicet in focis F & f defigantur clavi aut paxilli, quorum alteri in F annectatur filum FMC, altero ſui extremo C regulæ Cf alligatum, quæ ipſum ſuperet axe transverſo AB. Altera regulæ extremitas perforata clavo f injiciatur & ſtilo ad filum applicato regula emoveatur.

COROLLARIUM II.

510. Iisdem datis puncta quotcunque hyperbolæ determinantur, si ex foco f intervallo quocunque Af majore describatur arcus, facto $fb = AB$, intervallo residuo bm ex F ducatur arcus alius priorem in m intersecans: erit enim ob $fm - Fm = AB$, m punctum hyperbolæ (§. 508.).

DEFINITIO XVIII.

Tab. XIV. Fig. 168. 511. Si recta DE per verticem hyperbolæ A ordinatis M m parallela ducatur, fiatque axi conjugato æqualis, nempe pars DA & AE semiaxi; præterea ex centro C per D & E agantur rectæ CF & CG: rectæ hæ dicuntur *Asymptoti hyperbolæ.*

COROLLARIUM I.

512. Quoniam (§. 207.) CA : EA = CP : Pr & CA : (DA) AE = CP : PR; erit $Pr = PR$ (§. 126. *Arithm.*). Quare cum sit PM = Pm (§. 448.); erit quoque MR = mr (§. 69. *Arithm.*)

COROLLARIUM II.

513. Si AI ducatur parallela ipsi D C & AH ipsi CE; erit EA : ED = AI : DC (§. 207.) Sed EA = $\frac{1}{2}$ ED (§. 511.). Ergo AI = $\frac{1}{2}$ DC = $\frac{1}{2}$ CE. Et quoniam porro EA : AD = EI : IC (§. 207.); erit EI = CI = $\frac{1}{2}$ EC, consequenter AI = CI (§. 65. *Arithm.*).

DE-

DEFINITIO XIX.

514. Quadratum rectæ CI vel AI dicitur *Potentia hyperbolæ.*

PROBLEMA XXXVIII.

515. *Determinare potentiam hyperbolæ.*

Sit $CA=\frac{1}{2}a$, $AE=c$, erit $CE=V(\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}cc)$ (§. 319.) adeoque $CI=\frac{1}{2}V(\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}cc)$. Ergo $CI^2=\frac{aa+cc}{16}$.

Theorema: Potentia hypebolæ est decima sexta pars quadratorum axium conjugatorum, vel quarta pars quadratorum semiaxium conjugatorum.

PROBLEMA XXXIX.

516. *Determinare differentiam quadratorum. PM & PR* Tab. XIV. Fig 168.

Quoniam $DA=V\frac{1}{4}ab$ (§. 499.) & $CP=\frac{1}{2}a+x$; præterea (§. 207.).

$$CA : AD = CP : PR$$

$$\tfrac{1}{2}a : V\tfrac{1}{4}ab = \tfrac{1}{2}a+x : PR$$

erit $PR=(\frac{1}{2}aV\frac{1}{4}ab+xV\frac{1}{4}ab):\frac{1}{2}a=V\frac{1}{4}ab+2xV\frac{1}{4}ab:a$. *Quare*

$$PR^2=\tfrac{1}{4}ab+bx+bx^2:a$$

$$PM^2= \quad bx+bx^2:a \text{ (§. 498.)}$$

$$PR^2-PM^2=\tfrac{1}{4}ab=DA^2$$

Theorema. Si in hyperbola semiordinata PM producatur, donec asymptoto in R occur-

rat ; erit differentia quadratorum PM & PR æqualis quadrato ſemiaxis conjugati DA.

COROLLARIUM.

517. Creſcente adeo ſemiordinata PM, decreſcit recta MR, adeoque hyperbola ad aſypmtotum propius accedit. Nunquam tamen cum ea concurrere poteſt, quia cum ſit $PR^2 - PM^2 = DA^2$, fieri nequit, ut $PR^2 - PM^2 = 0$ evadat.

SCHOLION.

518. *En rationem, cur lineas CF & CG* ἀσυμπτώτες ſeu *coincidentes vocaverint veteres.*

PROBLEMA XL.

519. *Determinare quantitatem rectanguli ex MR in Mr.*

Sit $PR = z$, $PM = y$: erit $MR = z - y$, $Mr = z + y$, conſequent. $MR.\,Mr = z^2 - y^2 = PR^2 - PM^2$.

Theorema. In hyperbola rectangulum ex MR & Mr æquatur differentiæ quadratorum PR^2 & PM^2.

COROLLARIUM.

520. Idem ergo rectangulum æquale eſt quadrato ſemiaxis conjugati DA (§. 516.), conſequenter omnia rectangula eodem modo formata æqualia ſunt.

PROBLEMA XLI.

521. *Si QM & ſm cum aſymptoto CG, qm & SM cum altera CF parallelæ ducantur; determinare rationem rectangulorum QM. MS & qm. mſ.* Tab. XIV. Fig. 168.

Sit MR$=mr=a$; Rm$=r$M$=b$; QM $=v$, $mq=z$. Erit (§. 207.).

$$\begin{aligned} \text{RM}:\text{MQ} &= \text{R}m:m\text{ſ} \\ a:v &= b:(bv:a) \\ rm:mq &= r\text{M}:\text{MS} \\ a:z &= b:(bz:a) \end{aligned}$$

Eſt ergo MQ. MC$=buz:a$ & $mq.$ mſ$=bvz:a$, conſequenter MQ. MS$=mq.$ mſ.

Theorema. Si QM & mſ cum aſymptoto CG, qm vero & MS cum altera CF parallelæ ducantur; rectangula ex QM in MS & qm in mſ æqualia ſunt.

COROLLARIUM.

522. Quoniam C$q=$ſm & CQ$=$SM etiam rectangula ex Cq in qm & ex CQ in QM æqualia ſunt.

PROBLEMA XLII.

523. *Determinare rationem rectanguli ex qm in mſ ad potentiam hyperbolæ ſeu AI².* Tab. XIV. ig. 168.

Sit $mr=z$, $qm=y$, AE$=c$: erit, ob parallelas AE & Pr, ang. E$=r$, & ob

parallelas AI & qm, ang. I$=q$ (§. 182.); consequenter (§. 206.).

$$mr : qm = AE : AI$$
$$z : y = c : \frac{cy}{z}$$

Porro ob mR. mr=AE² (§. 520.) erit (§. 212. *Arithm.*)

$$mr : AE = AE : mR$$
$$z : c = c : \frac{cc}{z}$$

Denique ob parallelas fm & MQ (§. 207.).

$$MR : MQ = mR : mf$$
$$z : y = \frac{c^2}{z} : \frac{cy}{z^2}$$

Est enim mr=MR (§. 512.), cumque sit
$$mr : qm = AE : AI$$
& MR : QM=DA : HA = AE : AI *per demonstr.*, etiam MQ $= mq$ (§. 126. *Arithm.*). Quare $fm. qm$, Cq. $mq = ccy^2 : z^2$. Est vero etiam AI²$=(c^2y^2) : z^2$. Ergo $fm. qm$ = AI²

Theorema. Si qm cum asymptoto CF parallela ducatur, rectangulum ex qm in Cq æquatur potentiæ hyperbolæ.

COROLLARIUM I.

524. Quare si fiat CI=AI=a, Cq=x & qm=y; erit $a^2=xy$: quæ est æquatio naturam hyperbolæ intra asymptotos declarans.

Co-

COROLLARIUM II.

Tab. XIV. Fig. 167.

525. Datis ergo asymptotis positione & latere potentiæ hyperbolæ CI vel AI, si in una asymptotorum CG sumantur abscissæ quotcunque, invenientur totidem semiordinatæ & per eas puncta quotlibet hyperbolæ determinabuntur, quærendo ad abscissas & latus potentiæ CI tertias proportionales (§. 210.). Nimirum sint AB & AC asymptoti, AD=DI=a latus potentiæ hyperbolæ. Sit AP=x. Ducatur FG parallela ipsi AC & PN parallela ipsi DI; erit PN=DI=a. Ducatur AN secans DI in H: erit (§. 207.)

$$AP : PN = AD : DH$$
$$x : a = a : DH$$

adeoque DH=$a^2 : x$. Quare si fiat PM (=y) =DH: erit $y = a^2 : x$, consequenter $yx = a^2$, adeoque punctum M in hyperbola (§. 524.).

PROBLEMA XLIII.

Tab. XIII. Fig. 159.

526. *Determinare in hyperbola subtangentem PT & subnormalem PR.*

Si per punctum contactus M ducatur secans DS, & reliqua fiant ut (§. 473. & 494.); sitque axis transversus=a, parameter=b, AP=x, PM=y, MQ =m & QS=n; erit AV=$x+m$ & VS =$y+n$.

$$ay^2 + 2any + an^2 = abx + abm + bx^2$$
$$2bmx + bm^2 \text{ (§. 497.)}.$$

Præterea $ay^2 = abx + bx^2$ (§. 497.).

 adeo-

adeoque $2any + an^2 = abm + 2bmx + bm^2$
Seu $(2ay + an)n = (ab + 2bx + bm)m$

Si hic quoque, ut ante (§. 473. & 494.) ſecans DS per motum circa punctum M in tangentem TM abire ſupponatur, rectangula an & bm reſpectu reliquorum rectangulorum æquationem ultimam ingredientium pro nihilo haberi poſſunt; hinc

$$2ayn = abm + 2bmx$$
$$2ayn : (ab + 2bx) = m$$

Quia QS : QM = PM : (PT + TD) (§. 207.)
Seu $n : \frac{2ayn}{ab+2bx} = y : (PT + TD)$

TD vero $= o$, eodem modo quo (§. 494.) reperitur $PT = (ax + x^2) : (\frac{1}{2}a + x)$; adeoque $\frac{1}{2}a + x : x = a + x : PT$.

Theorema. In hyperbola eſt ut aggregatum ex ſemiaxe transverſo & abſciſſa ad abſciſſam, ita aggregatum ex integro axe transverſo & abſciſſa ad ſubtangentem.

Cum etiam ſit PT : PM = PM : PR. (§. 472. Sive $\frac{2ax + 2x^2}{a + 2x} : y = y : PR$

Erit $PR = \frac{(a + 2x)y^2}{2ax + 2x^2} = \left(\frac{a + 2x}{2ax + 2x^2}\right)$
$\left(\frac{abx + bx^2}{a}\right)$ (§. 498.) $= \frac{a^2bx + 3abx^2 + 2bx^3}{2a^2x + 2ax^2}$

$$=\frac{a^2b+3abx+2bx^2}{2a^2+2ax}=\frac{(ab+2bx)(a+x)}{2a(a+x)}$$

$=\frac{ab+2bx}{2a}=(\frac{1}{2}a+x)b:a$. Quare $a:b=\frac{1}{2}a+x:PR$.

Theorema. In hyperbola eſt ut axis transverſus ad parametrum, ita aggregatum ex ſemiaxe transverſo & abſciſſa ad ſubnormalem.

Denique $AT=(ax+x^2):(\frac{1}{2}a+x)-x$ $=(ax+x^2-\frac{1}{2}ax-x^2):(\frac{1}{2}a+x)=\frac{1}{2}ax:(\frac{1}{2}a+x)$.

Theorema. In hyperbola eſt ut aggregatum ex ſemiaxe transverſo & abſciſſa ad abſciſſam, ita ſemiaxis transverſus ad rectam AT inter verticem & tangentem interceptam.

PROBLEMA XLIV.

Tab. XIV. Fig. 170.

527. *Inveſtigare naturam curvæ, quæ oritur, ſi conus ABC ita ſecetur, ut ſectionis axis DE ſit lateri Coni AC parallelus, ipſum vero planum ſectionis DLN ad baſin ſectionis triangularis AB perpendicularis.*

Secetur conus plano HMI baſi ANB parallelo: erit HMI circulus (§. 359.), conſequenter cum uterque circulus HMI & ANB per ſectionem triangularem ACB ſecetur in HI & AB & a ſectione data in PM & LN; erunt cum HI & AB, tum PM & LN inter ſe parallelæ. Quare cum ſit EN perpendicularis ad AB *per hypoth.* erit etiam PM perpendicularis ad HI, conſequenter

ter cum DE & HI, itemque DE & AB ſint in eodem plano ſectionis triangularis, EN & PM etiam perpendiculares ſunt ad DE adeoque ſemiordinatæ ad axem DE applicatæ (§. 446. 448.). Et quia AH parallela ipſi EP *per hypoth.* HP parallela ipſi AE *per demonſtr.* erit HP =AE. Sit jam AE=HP=v, PI=t, DP =x, DE=z; erit (§. 207.).

$$DP : DE = PI : EB$$
$$x : z = t : \frac{tz}{x}$$

Ergo $PM^2 = HP.\ PI$ (§. 454.) $= tv$ & $EN^2 = AE.\ EB$ (§. *cit.*) $= tzv : x$. Eſt ergo (poſitis $PM^2 = y^2$, $EN^2 = q^2$)

$$y^2 : q^2 = tv : \frac{tzv}{x}$$

hoc eſt $tvx : tzv$ (§. 348. *Arithm.*).
$$x : z$$

Eſt itaque curva DMNLD parabola (§. 467.).

PROBLEMA XLV.

Tab. XIV. Fig. 169

528. *Si conus ABC ita ſecetur, ut axis ſectionis DE cum diametro baſis AB continuata in F concurrat, & planum ſectionis continuatum eam ad angulos rectos ſecet, invenire naturam curvæ ex hac ſectione prodeuntis DMNELD.*

Eodem, quo ante (§. 527.) modo oſtenditur eſſe PM & QN cum ſemiordi-

natas

natas circulorum IMH & LNK, tum curvæ DMNE. Sit jam $DE = a$, $DP = x$, $DQ = v$, $PH = t$, $QL = s$; erit $PE = a - x$, $QE = a - v$ & (§. 207.).

$$DP : PH = DQ : QK$$
$$x : t = v : \frac{vt}{x}$$
$$EP : QL = EP : PI$$
$$a - v : s = a - x : \frac{sa - sx}{a - v}$$

Quare (§. 454.) $PM^2 = HP . PI = (tsa - tsx) : (a - v)$ & $QN^2 = KQ . QL = vts : x$, Eſt adeo

$$PM^2 : QN^2 = \frac{tsa - tsx}{a - v} : \frac{vts}{x}$$

hoc eſt $tsax - tsx^2 : avts - v^2ts$ (§. 348. *Arithm.*) $ax - x^2 : av - v^2$

Eſt itaque curva DMNELD Ellipſis (§. 486.).

PROBLEMA XLVI.

529. *Si Conus ABC ita ſecetur, ut axis ſectionis DQ continuatus cum latere Coni AC continuato in E concurrat, planum vero ſectionis DLN ſecet diametrum baſis AB ad angulos rectos; invenire naturam curvæ DLN, quæ ex hac ſectione reſultat.* Tab. XIV. Fig. 171.

Eodem modo, quo paulo ante (§. 527.), oſtenditur, QN & PM eſſe ſemiordinatas cum circulorum HMI atque ANB, tum curvæ DMN.

Sit

Sit ED$=a$, DP$=x$, DQ$=v$, PH$=t$, PI$=ſ$; erit EP$=a+x$, EQ$=a+v$ & (§. 207.)

$$EP : PH = EQ : AQ$$
$$a+x : t = a+v : \frac{at+vt}{a+x}$$
$$DP : PI = DQ : QB$$
$$x : ſ = v : \frac{ſv}{x}$$

Ergo HP. PI $=tſ$ & AQ. QB$=(atſv + v^2tſ) : (ax+x^2)$, consequenter ob PM^2$=$HP. PI & QN^2$=$AQ. QB (§. 454.).

$$PM^2 : QN^2 = tſ : \frac{atſv+v^2\,ſt}{ax+x^2}$$

hoc est, $\quad 1 : \frac{av+v^2}{ax+x^2}$

(§. 348. *Arithm.*) $\quad ax+x^2 : av+v^2$

Est itaque DLN hyperbola (§. 504.), DE ejus axis transversus, E vertex hyperbolæ oppositæ.

SCHOLION.

530. *Hinc intelligimus, quod statim ab initio parabolam, hyperbolam atque ellipsin tanquam ex Cono sectas proponere & ex indole sectionis æquationem fundamentalem eruere licuisset, nisi nobis constitutum fuisset ostendere, quomodo ex æquationibus utcunque assumtis vel datis curvarum proprietates ac descriptiones per algebram & arithmeticam speciosam eruere debeamus.*

ELE-

ELEMENTA
TRIGONOMETRIÆ PLANÆ.

CAPUT I.
DE CONSTRUCTIONE CANONIS, SINUUM, TANGENTIUM ATQUE SECANTIUM.

DEFINITIO I.

Tab. I. Fig. 1.

1. *Trigonometria plana* est scientia ex tribus trianguli rectilinei partibus inveniendi reliquas. E. gr. Ex duobus lateribus AB & AC atque angulo B inveniuntur anguli reliqui A & C cum latere tertio BC.

DEFINITIO II.

Tab. I. Fig. 2.

2. *Sinus rectus* AD arcus AE & AI est chordæ AB arcus dupli AEB dimidium.

Si-

Sinus totus eſt radius HC ſeu ſinus Quadrantis HE. *Sinus verſus* eſt pars radii ED inter ſinum rectum AD & arcum AE intercepta.

COROLLARIUM I.

3. Sinus ergo AD ad radium EC perpendicularis (§. 525. *Geom.*) : conſequenter ſinus omnes eidem radio inſiſtentes inter ſe paralleli (§. 200. *Geom.*).

COROLLARIUM II.

4. Quoniam arcus AE eſt menſura anguli ACE, & AI ejus contigui ACI (§. 45 *Geom.*); quadrans vero HE menſura anguli recti (§. 120. *Geom.*): AD etiam ſinus rectus & ED ſinus verſus eſt angulorum ACE & ACI; ſinus vero totus eſt ſinus anguli recti.

COROLLARIUM III.

5. Duo igitur anguli, qui ſunt deinceps, eundem habent ſinum.

COROLLARIUM IV.

6. Angulorum adeo obtuſorum ſinus iidem ſunt, quos habent eorum complementa ad duos rectos (§. 124. *Geom.*).

DEFINITIO III.

Tab. I. Fig. 2. 7. *Tangens* arcus EA eſt portio rectæ tangentis circulum EF inter rectas ex centro C per extrema arcus E & A ductas

ctas interceptæ. Recta FC dicitur *Secans* ejusdem arcus.

COROLLARIUM I.

8. Tangens EF ad radium EC perpendicularis eſt (§. 232. *Geom.*).

COROLLARIUM II.

9. Eſt etiam FE tangens & FC ſecans anguli ACE, itemque ACI (§. 45. *Geom.*).

COROLLARIUM III.

10. Duo igitur anguli, qui ſunt deinceps, eandem habent tangentem atque ſecantem.

DEFINITIO IV.

11. *Coſinus* eſt ſinus; *Cotangens* tangens; *Coſecans* ſecans arcus AH, qui eſt alterius AE complementum ad quadrantem. Ita e. gr. AG ſinus arcus AH dicitur Coſinus arcus AE. Vocantur etiam *Sinus*, *Tangentes* atque *Secantes complementi*. Tab. I. Fig. 2.

THEOREMA I.

12. *Sinus arcuum ſimilium ad radios ſuos eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

Chordæ enim arcuum ſimilium ad radios eandem rationem habent (§. 224. *Geom.*) Sed ſinus ſunt chordarum dimidia (§. 2.). Ergo & hi ad radios ratio-

nem

nem eandem habent (§. 130. *Arithm.*). *Q. e. d.*

HYPOTHESIS.

13. *Sumatur radius pro unitate & per ejus fractiones decimales determinetur quantitas ſinuum, tangentium atque ſecantium.*

SCHOLION.

14. *In tabulis ſinuum & tangentium ordinariis radius concipitur in 10000000 partes diviſus & ultra has fractiones in determinanda ſinuum & tangentium quantitate non deſcenditur. Qui tamen tabulas iſtas conſtruxerunt, ad fractiones multo minores deſcenderunt, ne error irreperet in ſcrupulis primis aſſignabilis. Secantibus hodie opus non habemus, cum omnia Trigonometriæ problemata absque illarum ope ſolvi poſſint.*

COROLLARIUM.

15. Cum latus hexagoni regularis ſextam circuli partem ſubtendat (§. 90. 264. *Geom.*) atque radio æquale ſit (§. 274. *Geom.*); ſinus graduum triginta eſt 5000000 (§. 2. *Trigon.* & §. 33. *Geom.*).

PROBLEMA I.

16. *Dato ſinu AD, invenire coſinum AG.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

Tab. I. Fig. 2. Quoniam EC ſinus ipſius EH (§. 2.) ad HC; & AG ſinus arcus AH (§. 2.) perpen-

pendicularis ad eandem HC (§. 3.); erit AG parallela ipsi DC (§. 200. *Geom.*) & ad G angulus rectus (§. 66. *Geom.*). adeoque △ AGC rectangulum (§. 77. *Geom.*). Quare cum AD & GC sint ad EC perpendiculares (§. 3.); erit GC=AD (§. 69. *Geom.*). si ergo

1. Ex quadrato radii AC subtrahatur quadratum sinus AD vel GC: relinquetur quadratum Cosinus AG (§. 319. *Geom.*). Unde si
2. Radix quadrata extrahatur (§. 190. *Arithm.*); prodibit Cosinus AG

E. gr. Sit AC 10000000; AD 5000000: reperietur AG 8660254, sinus 60°.

PROBLEMA II.

17. *Dato sinu AD arcus AE, invenire sinum arcus dimidii ½ AE.* Tab. I. Fig. 2.

RESOLUTIO.

Inveniatur chorda arcus AE (§. 324. *Geom.*). Hujus enim dimidium est ejus sinus (§. 2.).

E. gr. Sint AC & AD ut in probl. præc: reperietur sinus arcus ½ AE seu sinus 15° = 2588190.

PROBLEMA III.

18. *Dato sinu DG arcus DF, invenire sinum DE arcus dupli DB.* Tab. I. Fig. 3.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Cum anguli ad E & G recti sint (§. 3.) & angulus B utrique triangulo BCG & DEB communis; erit BC : CG=BD DE (§. 206. *Geom.*). Quare cum CG inveniri possit, dato sinu DG (§. 16.), & BD sit duplum ipsius DG (§. 2.): invenietur quoque DE (§. 215. *Arithm.*). *Q. e. f. & d.*

PROBLEMA IV.

Tab. I. Fig. 4.

19. *Datis sinibus FG & DE arcuum FA & DA, quorum differentia DF 35′ major non est, invenire sinum quemcunque intermedium IL.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur ad differentiam arcuum FD, quorum sinus dantur, differentiam arcus, cujus sinus quæritur, AI atque arcus AF sinui dato minori respondentis IF & differentiam sinuum datorum DH quartus numerus proportionalis (§. 215. *Arithm.*).
2. Is addatur sinui dato minori FG. Erit aggregatum sinus quæsitus IL.

DEMONSTRATIO.

Cum arcus DF & FI paucorum sint minutorum, *per hypoth.* pro lineis rectis citra errorem sensibilem haberi poterunt. Porro FG, IL & DE parallelæ sunt (§.

(§. 3.). Quare si ex F ad DE perpendicularis demittatur FH (§. 177. *Geom.*); erit HE=FG (§. 69. *Geom.*), adeoque DH differentia sinuum datorum FG & DE (§. 43. *Arithm.*). Unde ob parallelas IK & DH *per demonstrata*; DF: FI=DH: IK (§. 207. *Geom.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA V.

20. *Datis sinibus BD & FE duorum arcuum quorumcunque AB & AF, invenire sinum arcus semidifferentiæ eorundem* $\frac{1}{2}$ *BF.* Tab. I. Fig. 5.

RESOLUTIO.

1. Sinus minor BD subtrahatur a majore FE, relinquetur differentia FK.
2. Ex datis sinibus BD & FE inveniantur Cosinus BI & FH (§. 16.).
3. Cosinus minor FH subtrahatur e majore BI, erit BK differentia.
4. Ex summa quadratorum differentiarum BK & FK extrahatur radix quadrata (§. 190. *Arithm.*); prodibit chorda arcus differentiæ BF, cujus dimidium est sinus quæsitus (§. 2.). *Q. e. i.*

DEMONSTRATIO.

BD, FE & GC, tum AC, BI & FA inter se parallelæ & illæ ad AC, hæ ad GC perpendiculares (§. 3.), consequenter FH=KI & BD=EK (§. 69. *Geom.*)

& angulus BKF rectus (§. 181. 66. *Geom.*). Quamobrem FK differentia sinuum BD & FE, BK vero differentia cosinuum FH & BI atque FKB triangulum rectangulum (§. 77. *Geom.*). Ergo cum sit $BF^2 = BK^2 + FK^2$ (§. 319. *Geom.*); reperietur chorda BF, si ex summa quadratorum differentiæ sinuum FK & cosinuum BK radix quadrata extrahitur (§. 171. *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA VI.

Tab. I. Fig. 2.

21. *Invenire sinum 45. graduum*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

Sit HI circuli quadrans; erit HCI angulus rectus (§. 120. *Geom.*), adeoque △ cognomine rectangulum (§. 77. *Geom.*), consequenter $HI = HC^2 + CI^2$ (§. 319. *Geom.*). $= 2\,HC^2$ (§. 32. 288. *Geom.*). Quare cum HC sinus totus (§. 2.) sit 10000000 (§. 14.); si ex $2HC^2$ quadrato 200000000000000 extrahatur radix 14142136. (§. 190. *Arithm.*); prodibit chorda HI (§. 171. *Arithm.*), cujus dimidium 7071068 sinus 45° desideratus. *Q. e. i. & d.*

SCHOLION.

22. *Cum dato radio latus pentagoni regularis, sive chorda* 72°; *inveniri possit* (§. 434. *Geom.*), *illius dimidium erit sinus* 36° (§. 2.). *Datis itaque sinibus* 30° (§. 15.), 15° (§. 17.), 45° (§. 21.)

(§. 21.) & 36° *canon omnium ſinuum conſtrui poteſt: uti docetur in* Elementis Matheſeos univerſæ §. 25. Trigonom.

PROBLEMA VII.

23. *Dato ſinu unius minuti ſeu 60″ FO, invenire ſinum unius vel aliquot ſecundorum MN.* Tab. I. Fig. 4.

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

Quoniam arcus AM & AF ſunt admodum exigui, AMF pro linea recta haberi poteſt citra errorem in fractionibus radii decimalibus, quibus ſinus exprimimus aſſignabilem, hoc eſt, arcus AM & AF ſinibus eorum proportionales aſſumere licet. Quare cum MN ſit ipſi FG parallela (§. 3.); erit AF : FG = AM : MN (§. 207. *Geom.*). Datis ergo AF, FG & AM, *per hypoth.* invenitur MN (§. 215. *Arithm.*). *Q. e. i. & d.*

SCHOLION.

24. *Eadem ratione ſi opus foret, inveniri poſſet ſinus aliquot ſcrupulorum tertiorum.*

PROBLEMA VIII.

25. *Dato ſinu AD arcus AE invenire tangentem EF & ſecantem FC ejusdem arcus.* Tab. I. Fig. 2.

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

Quia ſinus AD & tangens FE ad radium EC perpendicularis (§. 3. 8.); erit ille huic parallelus (§. 200. *Geom.*). Quare ut Coſinus DC ad ſinum AD, ita ſinus totus ad tangentem EF: item ut Coſinus DC ad ſinum totum AC,

 ita

ita ſinus totus EC ad ſecantem CF (§. 207. *Geom.*). Invenietur adeo per illationem primam tangens EF; per alteram ſecans FC (§. 215. *Arithm.*) *Q. e. i. & d.*

SCHOLION.

26. *Conſtructo igitur Canone ſinuum* (§. 22.), *haud difficilis eſt conſtructio Canonis tangentium atque ſecantium.*

CAPUT II.
DE
ANALYSI TRIANGULORUM.

THEOREMA II.

Tab. I. Fig. 2.

27. *Tangens 45° EF æquatur radio EC.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam arcus AE 45° *per hypoth.* erit quoque angulus ACE 45° (§. 47. *Geom.*), conſequenter angulus F 45° (§. 188. *Geom.*). Quare EF = CE (§. 198. *Geom.*). *Q. e. d.*

THEOREMA III.

Tab. I. Fig. I.

28. *In omni triangulo ABC latera ſunt ut ſinus oppoſitorum angulorum.*

DE

DEMONSTRATIO.

Cum enim omne triangulum circulo inſcriptibile ſit (§. 230. *Geom.*); erunt latera AC, CB & AB chordæ arcuum cognominum (§. 30. *Geom.*), conſequenter latera dimidia ſinus arcuum dimidiorum (§. 2.). Sed arcus dimidii ſunt menſuræ angulorum oppoſitorum B, A & C (§. 238. *Geom.*). Ergo ut latus AC ad ſinum anguli ſibi oppoſiti B; ita latus BC ad ſinum anguli ſibi oppoſiti A, ita etiam AB ad ſinum anguli ſibi oppoſiti C. *Q. e. d.*

PROBLEMA IX.

29. *Datis duobus angulis A & C, una cum latere uni eorum C oppoſito AB, invenire latus alteri A oppoſitum BC.* Tab. I. Fig. I.

RESOLUTIO.

Inferatur (§. 28.):
ut ſinus anguli C
ad latus ſibi oppoſitum datum AB
Ita Sinus anguli alterius A ad latus quæſitum BC.

Invenietur adeo Logarithmorum ope BC per §. 267. *Arithm.*

E. gr. Sit C=48° 35′, A=57° 28′, AB=74′. Calculus talis erit:

Log. Sin. C	9.8750142
Log. AB	1.8692317
Log. Sin. A	9.9258681
Sum. Log. AB & Sin. A.	11.7950998
Log. BC.	1.9200856.

cui in Canone logarithmorum pro numeris vulgaribus respondent 83′. Cum vero logarithmus in tabulis non exactus reperiatur; inveniri possunt numeri inventi 83′ fractiones decimales, hoc est in casu nostro digiti, si sub characteristica 2 post 830″ denuo logarithmus ipsius BC evolvatur: cui proxime respondet numerus 831″. Quodsi præter digitos etiam lineas desideres; eundem logarithmum quære post 8310‴ & ei quam proxime respondere deprehendes 8319‴ Immo si canon major ad manus sit ipsa scrupula quarta expiscari licet, si logarithmus inventus post 83190⁗ evolvatur: ubi eidem quam proxime respondet logarithmus numeri 83192. Est ergo BC 8° 3′ 1″ 9‴ 2⁗ (§. 263.) *Arithm.*).

SCHOLION.

30. *Quid factu opus sit, si logarithmi characteristica fuerit 3, in Arithmetica loco citato docuimus.*

PROBLEMA X.

Tab. I, Fig. 1.

31. *Datis duobus lateribus AB & BC una cum angulo C uni eorum opposito, invenire angulos reliquos A & B.*

RE-

RESOLUTIO.

I. Inferatur (§. 28.);
ut latus unum AB
ad ſinum anguli dati ſibi oppoſiti C:
Ita latus alterum BC
ad ſinum anguli quæſiti ſibi oppoſiti A.

Invenietur adeo logarithmus ſinus anguli A, utendo logarithmis, *per* §. 267. *Arithm.*

Tab. I. Fig. 8.

II. Quodſi latus AG vel AB dato angulo C oppoſitum fuerit minus latere AC, quod opponitur angulo quæſito, quæſitus angulus & obtuſus eſſe poteſt, & acutus B (§. 183. *Geom.*) adeoque conſtare debet, utrum triangulum datum ſit obtuſangulum, an acutangulum In caſu poſteriori ſatisfacit numerus graduum, qui ſinui reperto reſpondet; in priori pro angulo obtuſo ſumitur ejus complementum ad 180° (§. 6.).

Tab. I. Fig. 8.

III. Quodſi angulus datus G in triangulo GAC fuerit obtuſus & datis præterea cruribus AG & AC quæratur acutus, in ſolutione pro ſinu obtuſi anguli AGC ſumitur deinceps poſiti acuti AGE ſinus (§. 6.).

Tab. I. Fig. I.

E. gr. Sit AB=94', BC=69', C=72° 15'.

Log. AB	1.9731279
Log. Sin. C	9.9788175
Log. BC	1.8388491
Sum. Log. Sin. C & BC	11.8176666
Log. Sin. *A*	9.8445387,

cui in canone proxime respondent 44° 21'. Quodsi Canon major non fuerit ad manus & præter scrupula prima etiam secunda desiderentur, *vi probl.* 4. (§. 19.) hunc in modum inveniuntur.

A logarith. invento 98445387 subtrahe
Tabul. prox. min. 98445018
& notetur Differ. I. 369
Simil. ex prox maj. 98446310 subduc
prox. min. 98445018
& notetur Diff. II. 1292
Inferatur: 1292 : 60 = 369
2) 646 : 30 30
11070 (17
646 :
4610
4522
88

Est ergo angulus A = 44° 21' 17''
Sed C = 72 15 0
Quare A + C = 116 36 17
Quon. A + C + B = 179 59 60
erit B = 63° 23' 43''

Si-

Similiter dentur in triangulo rectangulo præter rectum A hypothenusa BC & cathetus AC pro angulo B. Sit nempe BC 49′ AC 36′. Calculus talis erit:

Tab. I. Fig. 6.

Log. BC.	1.6901961
Log. Sin. tot.	10.0000000
Log. AC.	1.5563025
Log. Sin. B.	9.8661064, cui in

canone proxime respondent 47° 16′. Ergo C=42° 44′ (§. 188. *Geom.*).

Quodsi AG=349″, AC=382″, angulus C=57° 25′; erit

Tab. I. Fig. 8.

Log. AG	2.5428254
Log. Sin. C	9.9256261
Log. AC	2.5820624
Sum. Log. Sin. C & AC	125.076895.
Log. Sin. G	99648641,

cui in Canone proxime respondent 67° 15′. Est igitur angulus acutus G in triangulo AEG 67° 15′: quem si subtraxeris ex 180°, relinquetur pro obtuso AGC 112° 45′.

Detur denique in triangulo obtusangulo AGC angulus obtusus G 165° 17′, una cum cruribus AG=179″ & AC 223″ pro acuto C. Inferatur (§. 28. 6.):

Log. AC	2.3483049
Log. Sin. AGC	9.4049009
Log. AG	2.2528530
Sum. Log. Sin. G & AG	11.65775.39
Log. Sin. C	9.3094490, cui

in Canone respondent quam proxime 11° 46′.

PRO-

PROBLEMA XI.

32. *Datis duobus lateribus BA & AC cum angulo intercepto A invenire angulos reliquos.*

RESOLUTIO.

Tab. I. Fig. 6. I. Si triangulum ABC fuerit rectangulum; assumto crure uno circa rectum AB pro radio, erit alterum CA tangens anguli oppositi B (§. 7. 8.). Inferatur ergo:

ut crus unum AB
ad alterum AC:
ita sinus totus
ad tangentem anguli B.

E. gr. Sit BA 79', AC 54': erit

Log. BA	1.8976271
Log. AC	1.7323938
Log. Sin. Tot.	10.0000000
Log. Tang. B.	9.8347667,

cui in Canone respondent quam proxime 34° 21'. Ergo angulus C 55°39' (§. 188. *Geom.*).

Tab. I. Fig. 7. II. Si angulus A fuerit obliquus;

1. inferatur:

ut summa laterum datorum AB & AC
ad differentiam eorundem:
ita tangens semisummæ angulorum quæsitorum C & B.
ad tangentem semidifferentiæ eorundem.

2. Ad-

2. Addatur ſemidifferentia ad ſemiſummam; aggregatum erit angulus major C. Eadem a ſemiſumma ſubtrahatur, reſiduus fiet angulus minor B.

E. gr. Sit AB 75′, AC 58′, A 108° 24′: erit

AB 75	AB 75	A+B+C 179° 60
AC 58	AC 58	A 108 24
Sum. 133	Diff. 17	B+C 71 36
		$\frac{1}{2}$(B+C) 35 48

Log. AB+AC	2.1238516
Log. AB—AC	1.2304489
Log. Tang. $\frac{1}{2}$(B+C)	9.8580694
Summa Log.	11.0885183

Log. Tang. $\frac{1}{2}$(C—B) 8 9646667, cui in tabulis proxime reſpondent 5° 16′.

$\frac{1}{2}$(B+C) = 35° 48′	$\frac{1}{2}$(B+C) = 35° 48′
$\frac{1}{2}$(C—B) = 5 16	$\frac{1}{2}$(C—B) = 5° 16
C = 41° 4′	B = 30° 32′

DEMONSTRATIO.

Crure majore dato AB ex vertice anguli dati A deſcribatur circulus (§. 110. *Geom.*), & crus minus AC utrinque continuetur (§. 15. *Geom.*), donec circulo in E & D occurat. Erit ob AE = AB = AD (§. 32. *Geom.*) CE ſumma laterum datorum, CD differentia eorundem. Quoniam DE diameter. (§. 31. *Geom.*); erit EBD ſemi circulus (§. 112. *Geom.*), conſequenter angulus EBD rectus (§. 241. *Geom.*

adeo-

adeoque EB ad BD perpendicularis (§. 66. *Geom.*). Quare ſi BD ſumatur pro ſinu toto; erit EB tangens anguli EDB (§. 7. 8.). Eſt vero $o = x + y$ (§. 186. *Geom.*) & inde ob $u = \frac{1}{2} o$ (§. 237. *Geom.*), $u = \frac{1}{2}(x+y)$. Ergo EB tangens ſemmiſummæ angulorum quæſitorum x & y. Quoniam $x = u + n$ (§. 186. *Geom.*); erit n ſemidifferentia angulorum x & y (§. 360. *Arithm.*) Sumto itaque DB denuo pro radio ſi deſcribatur arcus DG (§. 110. *Geom.*) & in D excitetur perpendicularis DF (§. 195. *Geom.*); erit DF tangens anguli n (§. 7. 8.), hoc eſt, ſemidifferentiæ angulorum quæſitorum x & y *per demonſtr.* Jam cum anguli EBD & FDB ſint recti *per demonſtr.* & hinc FD & EB parallelæ (§. 200.), adeoque BED & FDE æquales (§. 182. *Geom.*) item verticales ad C æquales (§. 132. *Geom.*); erit CE: BE := DC: DF (§. 206. *Geom.*), conſequenter & CE: DC = BE: DF (§. 122. *Arithm.*). Data itaque per tangentem DF angulorum quæſitorum ſemidifferentia, reliqua in reſolutione manifeſta ſunt per (§. 360. *Arithm.*). Q. e. d.

PROBLEMA XII.

Tab. I. Fig. 8. 23. *Datis tribus lateribus AB, BC & CA, invenire angulos A, B & C.*

RE-

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Ex vertice anguli A latere minimo AB describatur circulus (§. 110. *Geom.*) erit, ob AD = AB (§. 32. *Geom.*), CD summa crurum AC & AB; CF vero differentia eorundem. Et ideo inferre licet (§. 255. *Geom.*): ut Basis BC.
ad summam crurum CD;
Ita differentia crurum CF ad segmentum basis CG.

2. Inventum adeo segmentum CG (§. 215, *Arithm.*) si subtrahatur a basi CB; relinquitur chorda GB.

3. Demittatur ex A perpendicularis AE ad chordam GB (§. 177. *Geom.*); erit BE = EG = $\frac{1}{2}$GB. (§. 225, *Geom.*). Datis adeo in triangulo rectang. AEB lateribus AB & BE, & in altero ACE lateribus AC & CE; inveniuntur anguli B atque C (§. 31.). *Q. e. f. & d.*

E. gr. Sit AB = 36′, AC = 45′, BC = 40′: erit

AC = 45′	AC = 45′
AB = 36	AB = 36
AC + AB = 81	FC = 9

Log. BC	= 1. 6020600
Log. AC + AB	= 1. 9084850
Log. FC	= 0. 9542425
Log. summa	= 2. 8627275

Log.

Log. CG = 1.2606675, cui in tabulis quam proxime respondent 18′ 2″ 2‴ (§. 263. *Arithm.*).

BC = 4000‴	EG = 1089‴
CG = 1822	CG = 1822
BG = 2178	CE = 2911
BE = 1089	

Log. AB	= 3.5563025
Log. Sin tot.	= 10.0000000
Log. EB	= 3.0370279

Log. Sin. EAB = 9.4807254, cui in tabulis quam proxime respondent 17°36′, adeoque angulus ABE 72°24′ (§. 188. *Geom.*)

Log. AC	= 3.6532125
Log. Sin. tot.	= 10.0000000
Log. CE	= 3.4640422

Log. Sin. EAC = 9.8108297, cui in tabulis quam proxime respondent 40°18′. Ergo ACE 49° 42′ (§. 188. *Geom.*) & CAB 57° 54′ (§. 64. *Arithm.*)

CA-

CAPUT III.

DE USU TRIGONOMETRIÆ PLANÆ IN GEOMETRIA PRACTICA.

PROBLEMA XIII.

34. *Construere instrumentum transportatorium rectilineum, hoc est, scalam secundum eam proportionem divisam, quam habent subtensæ arcuum ad radium.*

RESOLUTIO.

1. Ex communi canone sinuum excerpantur sinus arcuum 2°30′, 5°, 7°30′, 10°, 12°30′, &c. nempe in progressione arithmetica progredientium, in qua terminorum differentia est $2\frac{1}{2}$. Eos multiplica per 2; erunt facta chordæ arcuum 5, 10, 15, 20, 25 &c. (§, 2.): ut hic in tabella factum vides.

Gr	Chor. dimid.	Chor. integ.	Gr	Chor. dimid.	Chor. integ.
5	43.6	87	50	422.6	845
10	87.1	174	55	461.7	923
15	130.5	261	60	500 0	1000
20	173.6	347	65	537.2	1074
25	216.4	433	70	573.5	1147
30	258.8	517	75	608.7	1217
35	300.7	601	80	742.7	1285
40	342.0	684	85	675.5	1351
45	382.6	765	90	707.1	1414

Tab. II. Fig. 9.

2. Ducatur recta AD & ad eam erigatur perpendicularis AB (§. 195. *Geom.*) pro arbitrio in quinque, decem, viginti, &c. partes æquales dividenda, prout vel ſolos gradus, vel gradus dimidios, vel partes quartas &c. indicare debent ſubtenſæ.

3. Per ſingula diviſionum puncta agantur rectæ ipſi AD parallelæ (§. 202. *Geom.*).

4. In lineam AD, incipiendo ſemper a puncto A, transfer particulas chordarum integrarum gradibus 5°, 15°, 25°, 35° &c. reſpondentes ex ſcala geometrica in particulas minutiſſimas diviſa (§. 213. *Geom.*): in linea vero ſuperiori BC eodem modo deſignentur

tur particulæ chordarum respondentes gradibus 10, 20, 30, 40, 50 &c. Quodsi scala geometrica non continet particulas adeo minutas, quales desiderantur; utendum est chordis dimidiis: quod perinde ac si particulæ in scala bifariam dividerentur. Negligenda autem est nota puncto a reliquis separata, vel si major fuerit, ejus loco addenda est unitas ultimæ earum, quæ retinentur. E. gr. loco 258. 8 assume 259. Ultimas nimirum notas ideo adjecimus, ut appareret, quomodo earum dupla pro chordis computata fuerint.

5. Ducantur transversæ ex B in 5 ex 5 in 10, ex 10 in 15, ex 15 in 20, ex 20 in 25 &c.

Cum enim A 5, B 10 &c. sint chordæ 5, 10 &c. graduum & chordæ a quinis ad quinos gradus fere arcubus proportionaliter crescant: erit c 1 subtensa arcus 1°, d 2 subtensa 2 &c. graduum (§. 207. *Geom.*).

COROLLARIUM I.

35. Quia subtensa 60° est radius (§. 274. *Geom.*); anguli quantitatem investigaturus intervallo B 60 describat ex vertice anguli intra crura ejus arcum, qui est mensura ipsius (§. 45. *Geom.*), & ejus chordam ad

ſcalam applicet, quæ, ſi e. gr. ex *d*. in 42 pertingat, oſtendit angulum eſſe 42°.

COROLLARIUM II.

Tab. II. Fig. 10.

36. Angulus datæ quantitatis conſtruetur, ſi radio B 60 deſcribatur ex centro B arcus CF & ſubtenſa gradus dati e. gr. 23, in ſcala reperta transferatur ex C in D. Erit enim DC menſura anguli B (§. 45. *Geom.*), adeoque tot graduum, quot arcus continet (§. 47. *Geom.*).

SCHOLION.

37. *Hujus inſtrumenti beneficio quantitatem angulorum etiam in ſcrupulis ſatis accurate explorari experientia loquitur.*

PROBLEMA XIV.

38. *Circulo polygonum regulare inſcribere & circumſcribere.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

Tab. II. Fig. 11.

1. Aſſumto radio 10000 partium, quales in Canone triangulorum habere ſupponitur, inde excerpatur ſinus ejus arcus, qui prodit, peripheria integra 360° per duplum numerum laterum polygoni, aut (quod perinde eſt) ſemiperipheria, hoc eſt 180°, per numerum laterum polygoni diviſa. Illius enim duplum eſt chorda arcus dupli (§. 2.), adeoque latus AB polygoni circulo inſcribendi (§. 264. *Geom.*).

2.

2. Quodſi radius circuli, cui e. gr. pentagonum inſcribendum, detur juxta certam aliquam menſuram, e. gr. 345″; latus polygoni in eadem menſura invenitur per regulam trium (§. 215. *Arithm.*), inferendo nempe

1000—1176—3450‴
3450

58800
4704
3528

4057|200 (4°0′ 5″ 7‴ Lat.
1 |000 (Pentag.

3. Dato radio deſcribatur circulus & in eo applicetur latus polygoni, quoties fieri poteſt (§. 264. *Geom.*).

4. Polygono regulari circulo inſcripto ſimile circumſcribetur (§. 273. *Geom.*).

SCHOLION.

29. *Ne moleſta ſit rationis lateris polygoni ad radium ex canone ſinuum inveſtigatio, in tabula hic exhibemus latera polygonorum iſtiusmodi particulis expreſſa, qualium radius habet* 10000000: *In praxi tot notæ verſus dexteram reſecantur, quot per circumſtantias ſingulares ſuperfluæ judicabuntur.*

Num. Later.	Quantitas Lateris.	Num. Later.	Quantitas Lateris.
III	17320508	VIII	7653668
IV	14142135	IX	6840402
V	11755705	X	6180339
VI	10000000	XI	5634651
VII	8677674	XII	5176380

PROBLEMA XV.

Tab. II. Fig. 11.

40. *Super data recta AB polygonum regulare deſcribere: & dato polygono regulari ABCDE circulum circumſcribere.*

RESOLUTIO.

Non alia re opus eſt, quam ut, ratione lateris ad radium ex tabula præcedente aſſumta, quæratur radius in ea menſura, in qua datur latus AB (§. 215. *Arithm.*).: dato enim latere AB & radio AL, polygonum deſcribi poteſt (§. 264. *Geom.*). Si vero intervallo radii ex A & B ſuper latere polygoni uno fiat interſectio in L, habebitur centrum L circumſcribendi circuli (§. 29. *Geom.*).

PROBLEMA XVI.

41. *Datis ſinu verſo AB & ſinu BC in menſura communi, non in particulis ra-*

radii decimalibus, invenire arcum FC in gradibus.

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

1. Quæratur ex his datis ſemidiameter AD (§. 250. *Geom.*). Tab. II. Fig. 12.
2. Datis jam in triangulo DBC præter rectum B (§. 3.) lateribus BC & DC; invenitur angulus ADC (§. 31.): qui indicat numerum graduum in arcu AC (§. 47. *Geom.*), cujus duplus eſt arcus FC (§. 225. *Geom.*) *Q. e. i. & d.*

SCHOLION.

42. *Hujus problematis uſus eſt in inveniendo ſegmento circuli* (§. 334. Geom.)

PROBLEMA XVII.

43. *Datis in figura rectilinea quacunque omnibus lateribus AB, BC, CD, DE, EA & angulis o & y; invenire diagonales.* Tab. II. Fig. 13.

RESOLUTIO.

1. In △ ABE, datis duobus lateribus AB & AE, una cum angulo *o* invenitur primum angulus A (§. 31.); dein diagonalis BE (§. 29.).

2. Eodem modo reſoluto triangulo BCD invenitur diagonalis BD. *Q. e. f.*

PRO-

PROBLEMA XVIII.

Ta. II. Fig. 13.

44. *Datis in figura rectilinea quacunque duobus lateribus AB & BC, una cum diagonalibus BE & BD atque angulis* o, x, *&* y; *invenire latera reliqua CD, DE & EA.*

RESOLUTIO.

1. Datis in triangulo ABE duobus lateribus AB & BE cum angulo intercepto *o*, invenitur primum angulus *u* (§. 32.) & deinde porro AE (§. 29.).

2. Eodem prorſus modo in triangulis reliquis BED & BCD inveſtigantur latera ED & DC. *Q. e. f.*

PROBLEMA XIX.

Tab. II. Fig. 13.

45. *Datis in figura rectilinea quacunque omnibus lateribus AB, BC, CD, DE, EA & tot angulis, quot ſunt latera, demtis tribus, C & D invenire diagonales BD & BE.*

RESOLUTIO.

1. In triangulo BCD, datis lateribus BC & CD cum angulo intercepto C, inveſtigetur angulus *m* (§. 32.), quo ex angulo D ſubducto relinquitur angulus *n*, atque porro diagonalis BD (§. 29.)

2. Da-

2. Datis jam in triangulo BDE lateribus BD & DE cum angulo intercepto *n*, eodem prorſus, quo ante modo reperitur diagonalis BE. *Q. e. f.*

PROBLEMA XX.

46. *Datis in figura rectilinea quacunque latere AB una cum angulis* o, x, y, e, u, & n; *invenire diagonales AC, AD, BD, & BE una cum lateribus BC & AE.* Tab. II. Fig. 14.

RESOLUTIO.

1. Datis in triangulo ABC angulis o & B ($=e+u+n$) una cum latere AB inveniuntur latus BC & diagonalis AC (§. 29.).

2. Similiter datis in triangulo ABD angulis $o+x$ & $e+u$ una cum latere AB, inveniuntur diagonales BD & AD (§. *cit.*)

3. Denique datis in triangulo ABE angulis A ($=o+x+y$) & e una cum latere AB, inveniuntur latus AE & diagonalis BE. *Q. e. f.*

SCHOLION.

47. *Cum ichnographiæ arearum optime perficiantur, datis omnibus lateribus itemque diagonalibus* (§. 280. Geom.); *horum problematum in planimetria uſus eſt non contemnendus. Qui tamen pra-*

xi operam dant, molestias calculi fugiunt; lucro magis, quam accurationi intenti.

PROBLEMA XXI.

Tab. III. Fig. 15.

48. *Metiri distantiam duorum locorum BC ex eodem tertio A accessorum.*

RESOLUTIO.

1. Investigetur quantitas anguli A, puncto A ad arbitrium assumto (§. 129. *Geom.*), nec non rectarum AB & AC(§. 109. *Geom.*).
2. Datis in △ BAC duobus lateribus BA & AC cum angulo intercepto A, inveniatur primum angulus B. (§. 32.) & hinc porro distantia BC (§. 29.). *Q. e. f.*

PROBLEMA XXII.

Tab. III. Fig. 16.

49. *Invenire distantiam duorum locorum AC, quorum unus A tantum accessibilis.*

RESOLUTIO.

1. Investigetur quantitas angulorum A & B, statione in B electa (§. 129. *Geom.*), itemque rectæ AB (§. 109. *Geom.*).
2. Inveniatur AC (§. 29.). *Q. e. f.*

PROBLEMA XXIII.

Tab. III. Fig. 17.

50. *Invenire distantiam duorum locorum inaccessorum AB.*

RE-

Resolutio.

1. Statione commoda in C electa investigetur quantitas anguli ACB, itemque angulorum D & E atque BCE (§. 129. *Geom.*), punctis D & E cum C in eadem linea designatis (§. 108. *Geom.*)
2. Investigetur etiam quantitas rectarum DC & CE (§. 109. *Geom.*).
3. Summa angulorum ACB & BCE, itemque BCE & E subtrahatur ex 180°, ut relinquantur anguli ACD (§. 125. *Geom.*).& CBE (§.192. *Geom.*): eodemque modo inveniatur angulus DAC.
4. Datis jam in triangulis DAC & CBE angulis cum latere uno, nempe DC in primo, CE in altero, inveniuntur AC & CB (§. 29.) & hinc porro angulus CAB (§. 29.), tandemque AB (§. 32.).

Problema XXIV.

Tab. III. Fig. 18.

51. *Invenire altitudinem accessibilem AB.*

Resolutio.

1. Statione in E electa instrumentoque (§. 220. *Geom.*) rite collocato, investigetur quantitas anguli ADC (§. 129. *Geom.*).
2. Quæratur porro distantia stationis ab altitudine DC (§. 109. *Geom.*), quæ erit ad AC perpendicularis (§. 101. *Geom.*).

3. Cum adeo C ſit rectus (§. 66. *Geom.*), in triangulo ACD invenietur AC (§. 29.).
4. Huic ſi addatur BC; prodibit altitudo integra AB. *Q. e. i.*

PROBLEMA XXV.

Tab. III. Fig. 21. 52. *Metiri altitudinem inacceſſam AB.*

RESOLUTIO.

1. Eligantur duæ ſtationes G & E cum altitudine AB in eadem recta (§. 108. *Geom.*), tanto intervallo DF diſtantes, ut angulus FAD non ſit nimis exiguus, nec altera ſtatio G nimis vicina altitudini AB.
2. Inveſtigetur quantitas angulorum ADC, AFC & CFB (§. 129. *Geom.*), itemque diſtantiæ FD longitudo (§. 109. *Geom.*).
3. Inveniatur primum in triangulo AFD ex datis angulo D. *per obſervationem*, & angulo AFD (§. 186. *Geom.*) & latere FD latus AF (§. 29.); dein ex notis in triangulo ACF præter rectum C angulo F & latere AF latus AG, itemque CF (§. 29.); tandem ex cognitis in triangulo FCB præter rectum C angulo CFP & latere CF latus CB (§. 29.).
4. Addantur AC & CB. Ita prodit altitudo quæſita AB (§. 64. *Arithm.*).

ELE-

ELEMENTA ANALYSEOS.

DE ALGEBRA AD TRIGONOMETRIAM PLANAM APPLICATA.

PROBLEMA I.

53. *Datis basi* HI *trianguli cujuscunque & angulis ad basim* H & I, *invenire altitudinem.*

Sit HI$=a$, LM$=x$, sinus anguli MIL$=s$, ejus Cosinus$=c$; sinus anguli LHM$=p$. ejus Cosinus$=q$. Erit (§. 28.) $s : x = c :$ MI & $p : x = q :$ HM. Unde reperitur MI$=cx : s$ & HM$=qx : p$ (§. 215. *Arithm.*). Quare (§. 65. *Arithm.*).

Tab III. Fig. 20

$$cx : s + qx : p = a$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad} sp$$
$$pcx + sqx = asp$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad} pc + sq$$
$$x = asp : (pc + sq)$$

 Æqua-

Æquatio penultima in hanc analogiam

$$pc+sq : sp = a : x$$

resoluta ſequens exhibet

Theorema. In omni triangulo HIL baſis HI eſt ad altitudinem ML ut ſumma rectangulorum ex ſinu anguli obliqui ad baſin unius in Coſinum alterius ſe habet ad rectangulum ex ſinibus angulorum ad baſin.

Aliter.

Sumatur ML pro ſinu toto, erunt HM & MI tangentes angulorum HLM & MLI, ſeu cotangentes datorum H & I. Sint ſinus totus$=t$, Cotangentes$=m$ & n, LM$=x$, HI$=a$; erit $t: m = x$: HM & $t: n = x$: MI (§. 32.), conſequenter HM$=mx : t$, MI$=nx : t$, adeoque (§. 65. *Arithm.*).

$$a = (mx+nx) : t$$
$$\overline{} \, t$$
$$at = mx+nx$$
$$\overline{} \, m+n$$
$$at : (m+n) = x$$

Theorema. Baſis trianguli eſt ad altitudinem ut ſumma Cotangentium angulorum ad baſin ad ſinum totum.

PROBLEMA II.

Tab. III. Fig 20.

54. *Datis ſumma crurum* HL+LI *una cum angulis ad baſin* H & I, *invenire crura* HL & LI.

Sit

Sit HL+LI$=a$, finus H$=m$, finus I$=n$, HL$=x$, erit IL$=a-x$. Quare (§. 28.).

$$x:n=a-x:m$$
$$mx=na-nx$$
$$mx+nx=na$$
$$x=na:(m+n)$$
$$a-x=(ma+na-na):(m+n)$$
$$=ma:(m+n)$$

Theorema. Summa crurum trianguli HL+LI eſt ad crus unum HL ut ſumma ſinuum angulorum ad baſin H & I ad ſinum anguli I cruri iſti HL oppoſitum.

Problema III.

55. *Datis angulis ad baſin* H *&* I *una cum ſegmento baſeos uno HM invenire ſegmentum alterum* MI.

Tab. III. Fig. 20.

Sit HM$=a$, MI$=x$, ſinus anguli H$=m$, ejus Coſinus$=n$; ſinus anguli I$=p$, ejus Coſinus$=q$. erit (§. 28.) $n:a=m:$ ML. Reperitur adeo ML$=am:n$. Porro vi §. *cit.* $q:x=p:$ ML. Reperitur itaque ML$=px:q$. Quare (§. 60. *Arithm.*).

$$px:q=am:n$$
$$\overline{\qquad\qquad} nq$$
$$pnx=amq$$
$$x=amq:pn$$

Eſt

Eſt adeo $pn : mq = a : x$

Theorema. Si ex vertice trianguli L. in baſin HI perpendiculum demittitur; ſegmentum unum HM eſt ad alterum MI ut rectangulum ex ſinu anguli ſegmento MI adjacentis in Coſinum anguli ſegmento HM adjacentis ad rectangulum ex ſinu anguli H in Coſinum anguli I.

PROBLEMA IV.

Tab. III. Fig. 19.

56. *Data area trianguli rectanguli* ABC *una cum angulo* C, *invenire crura* AB &BC.

Sit area$=b^2$ BC$=x$
Sint totus$=r$ erit BA$=2b^2 : x$ (§. 304. Geom.)
Tangens C$=t$

Quare (§. 32. *Trigon.*)

$$x : 2b^2 = r : t$$

$$x$$

$$x^2 : 2b^2 =$$

$$x^2 = 2rb^2 : t$$

$$x = \sqrt{(2rb^2 : t)}$$

Theorema: Area trianguli rectanguli eſt ad quadratum cruris unius BC ut tangens dimidia anguli adjacentis C ad ſinum totum.

Tab. III. Fig. 22.

Conſtructio. Sit EDA angulus datus. Fiat DA$=2b$ & erigatur AE perpendicularis ad DA: erit ſimul DA $= r$ & AE $= t$ (§. 7.) Producatur EA in infinitum & in D erigatur ad ED perpendicularis DG, erit

erit $AG = \frac{2br}{t}$ (§. 249. *Geom.*) Fiat AH $= AG$ & $AI = \frac{1}{2} AD = b$, erit descripto super IH semicirculo $AL = \sqrt{\frac{2b^2r}{t}}$. Fiat denique $AB = AL$ & ducatur BC cruri anguli dati DE parallela; erit triangulum BAC quæsitum.

PROBLEMA V.

57. *Datis in quadrilatero circulo inscripto lateribus* AE, EB, BC & AC *una cum diagonali* EC, *invenire diagonalem* AB.

Tab. III. Fig. 23.

Sit $AE = a$, $EB = b$, $BC = c$, $AC = d$, $EC = f$, $AB = y$. Ducatur EF ita ut sit $o = x$ (§. 171. *Geom.*). Quoniam præterea $ACE = ABE$ (§. 239. *Geom.*); erit $EC : AC = EB : BF$, hoc est, $f : d = b : BF$ (§. 206. *Geom.*). Reperitur ergo $BF = bd : f$. Quoniam porro $EAB = ECB$ (§. 239. *Geom.*) & $AEF = CEB$ (§. 66. *Arithm.*), erit $EC\ (f) : CB\ (c) = EA\ (a) : AF\ (ac : f)$ (§. 206. *Geom.*). Quare (§. 64. *Arithm.*).

$$\frac{(bd + ac) : f = y}{bd + ac = fy}$$

Theorema. In quadrilatero circulo inscripto AEBC rectangulum ex diagoniis EC & AB æquatur rectangulis ex lateribus oppositis EB in AC & EA in BC.

Pag.	Lin.	*Errata.*	*Corrige.*
16	12	HYPOTHESIS III	HYPOTHESIS II.
ibid	13	81	18
56	10	$< 5 : 4$	$> 5 : 4$
61	In Exemplo §.127.	6 : 12—18 : 36	6 : 12=18 : 36
66	11	C; D	C : D
78	1	æquivalendem	æquivalentem.
161	18	$\sqrt[3]{3}=3\sqrt[3]{3}$	$5\sqrt[3]{3}-3\sqrt[3]{3}$
169	22	m^{-2}	m^{n-2}
181	3	Sit a	Si a
ibid	5	tur quantitas minor si	quantitas minor; si
231	In margine §. 53.	Fig. 4	Fig. 7.
ibid	- - - - - §. 54.	Fig. 7	Fig. 4.
256	18	Si altero	altero
278	12	eodem	eodem modo
288	18	Ea : I	Ea : a I
294	12	repariri	reperiri
301	23	ut & *y*	*u* & *y*
316	10	priorum	priorem
323	3	per rectam F	per rectam FH
ibid.	11	Fe=d=F Fe=Fa	Fe=Fd=Fc=Fa
336	10	AB v DC	ABDC
365	19	EDE	EDF
367	22	ejusdem	iisdem
426	7	Secatur	vocatur
456	ultima	$\frac{a^2bx+3abx^2+2bx^2}{2a^2x+2ax^3}$	$\frac{a^2bx+3abx^2+2bx^3}{2a^2x+2ax^2}$

Correcta ut video

Fig. Geom. TAB. I.

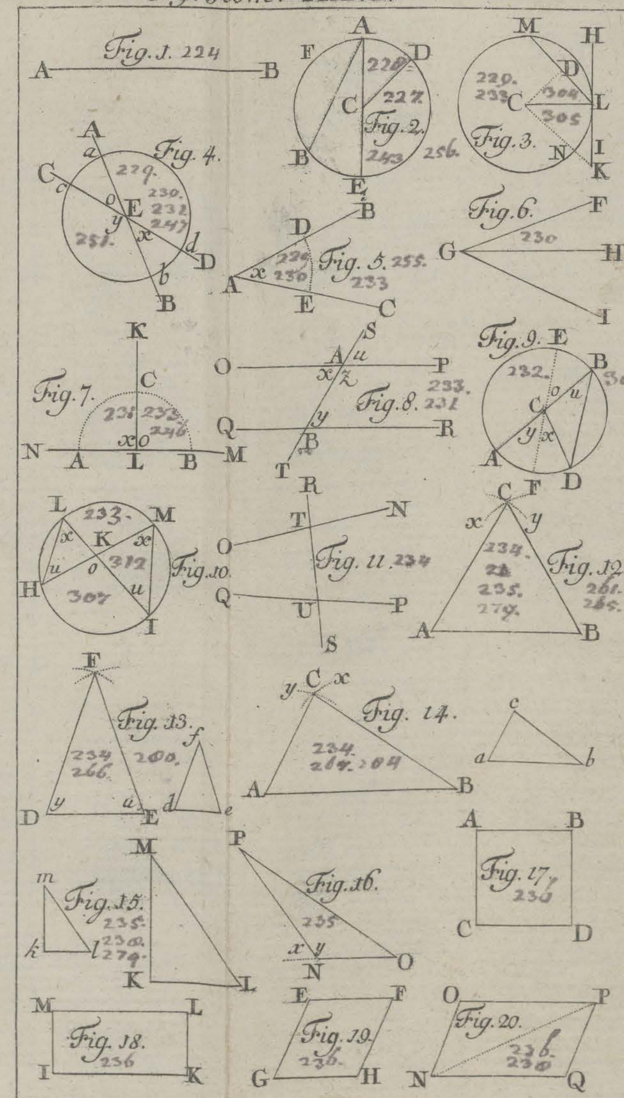


Fig. Geom. TAB. II.

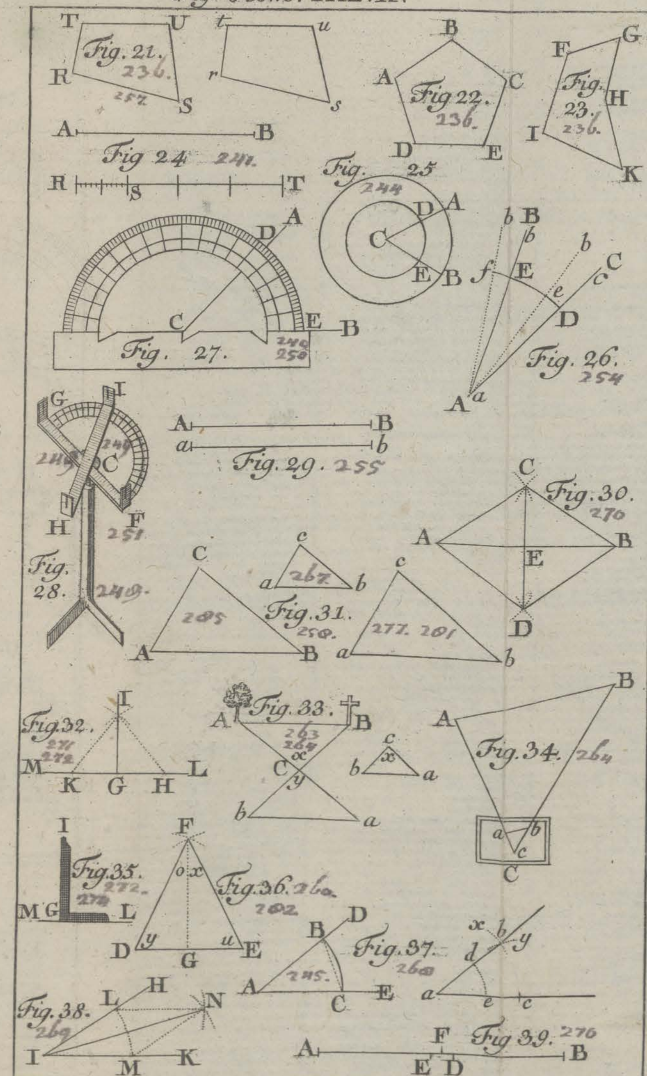


Fig. Geom. TAB. III.

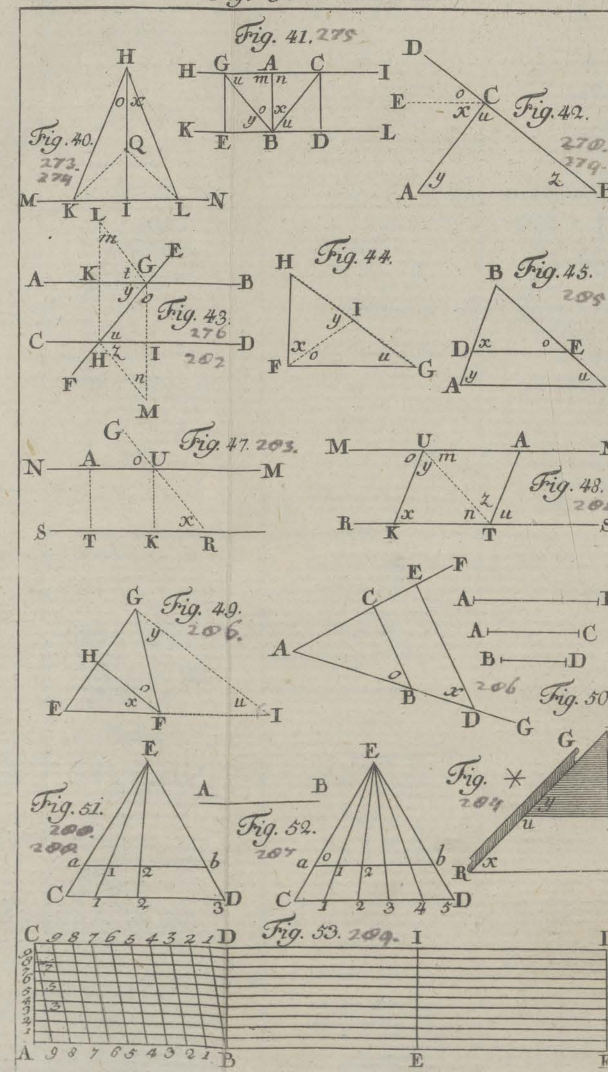
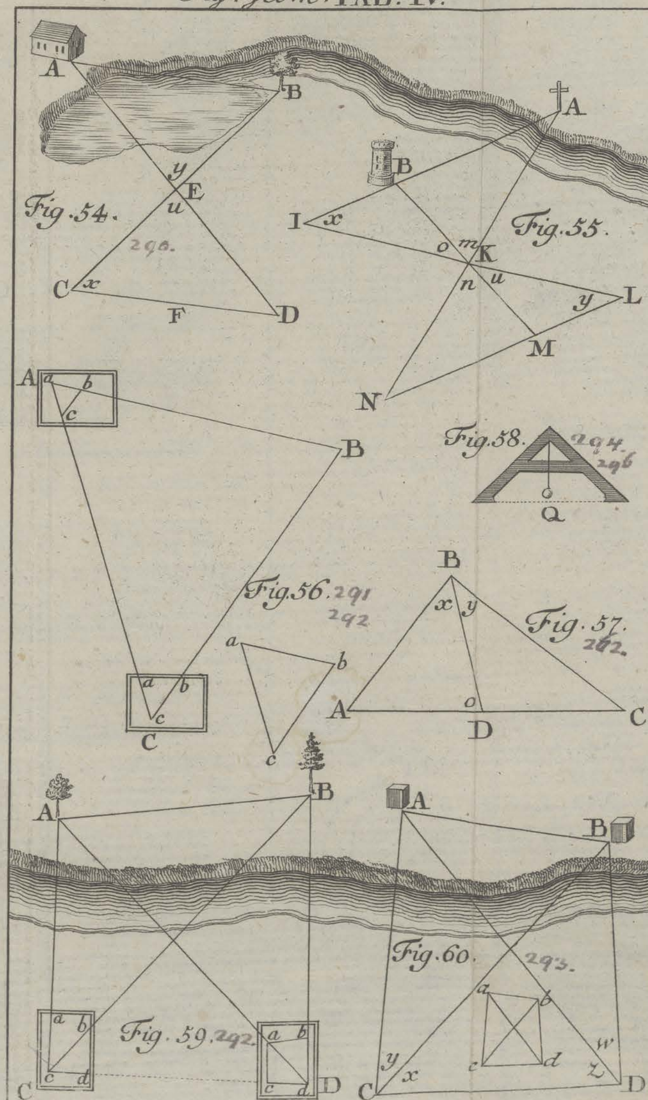


Fig. Geom. TAB. IV.



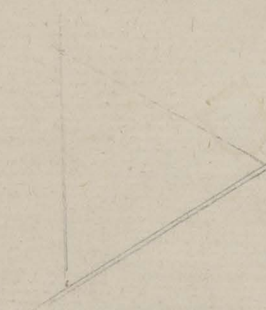


Fig. Geom. TAB.V.

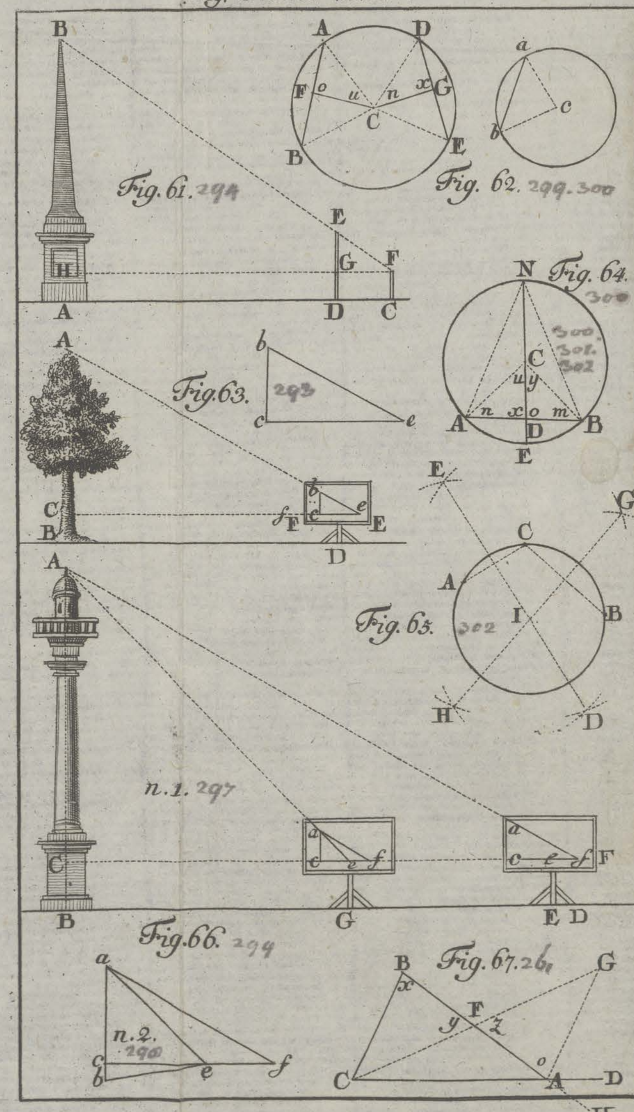


Fig. Geom. TAB. VI.

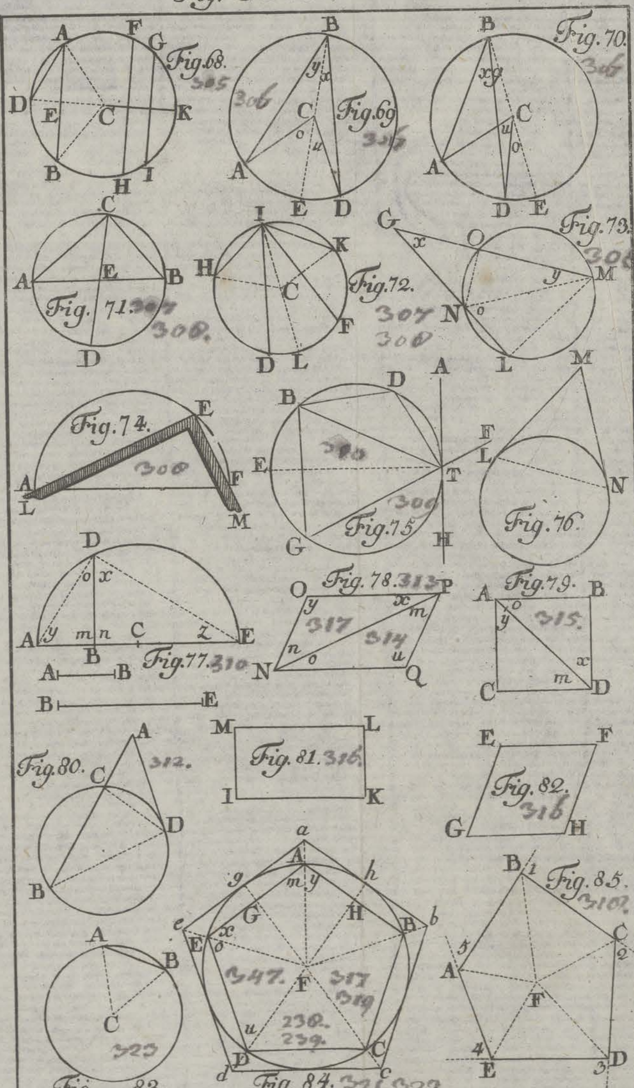
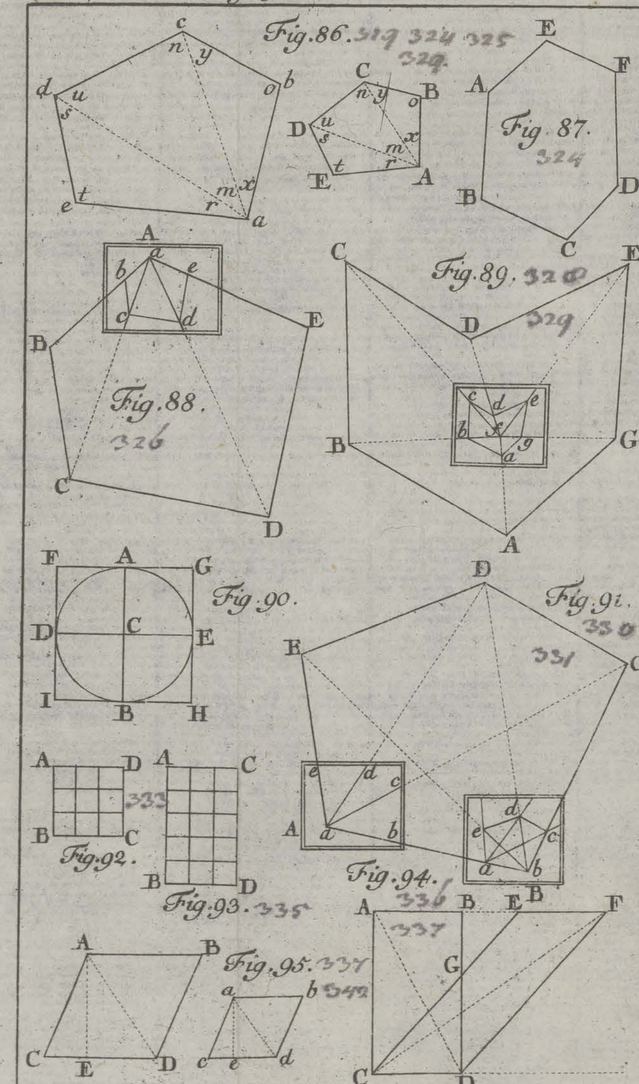


Fig. Geom. TAB. VII.



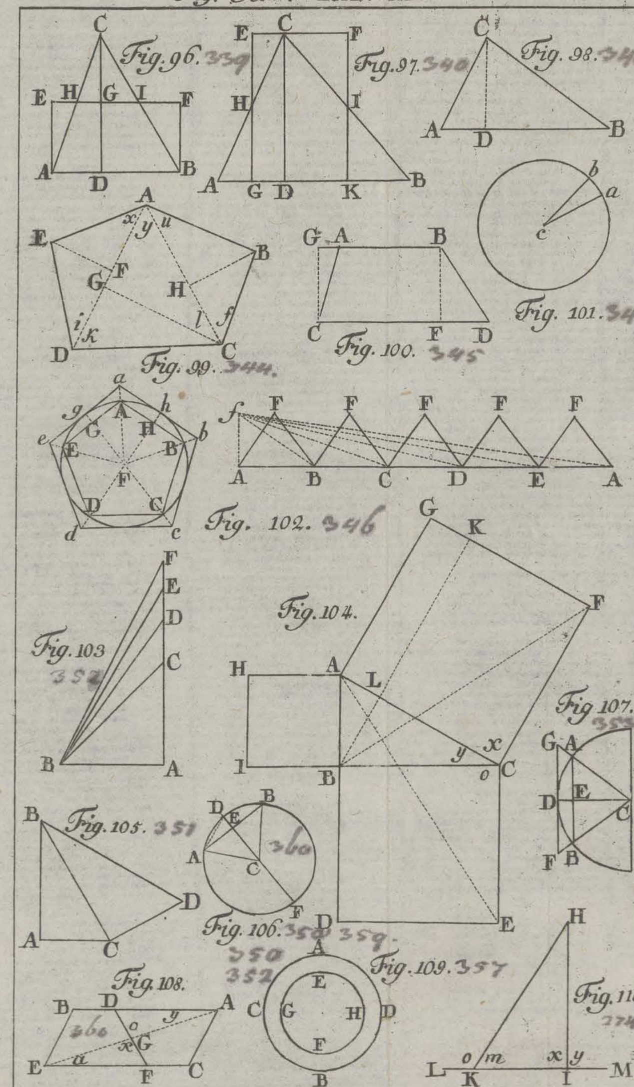

Fig. 96.
Fig. 97.
Fig. 98.
Fig. 99.
Fig. 100.
Fig. 101.
Fig. 102.
Fig. 103
Fig. 104.
Fig. 105.
Fig. 106.
Fig. 107.
Fig. 108.
Fig. 109.
Fig. 110

Fig. Geom. TAB. IX.

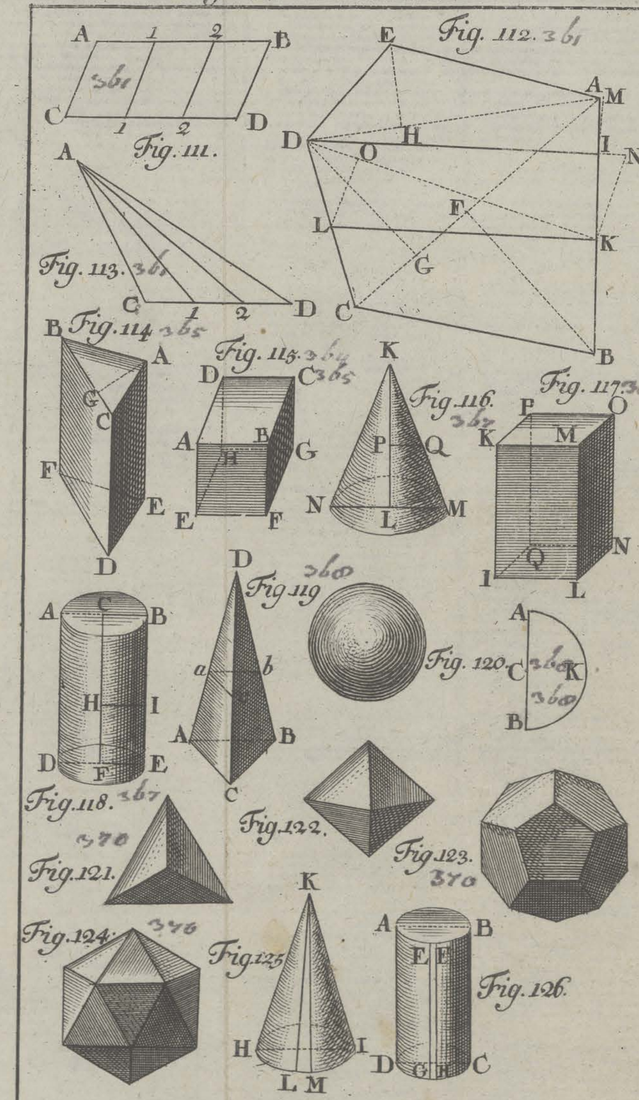


Fig. Geom. TAB. X.

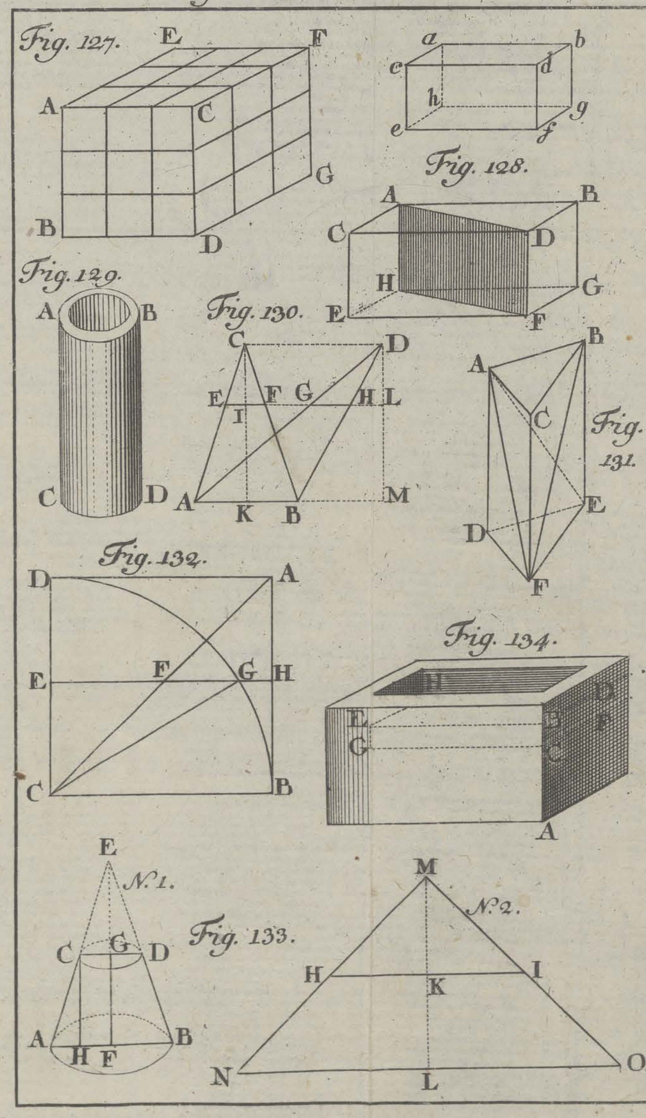


Fig. Geom. TAB. XI.

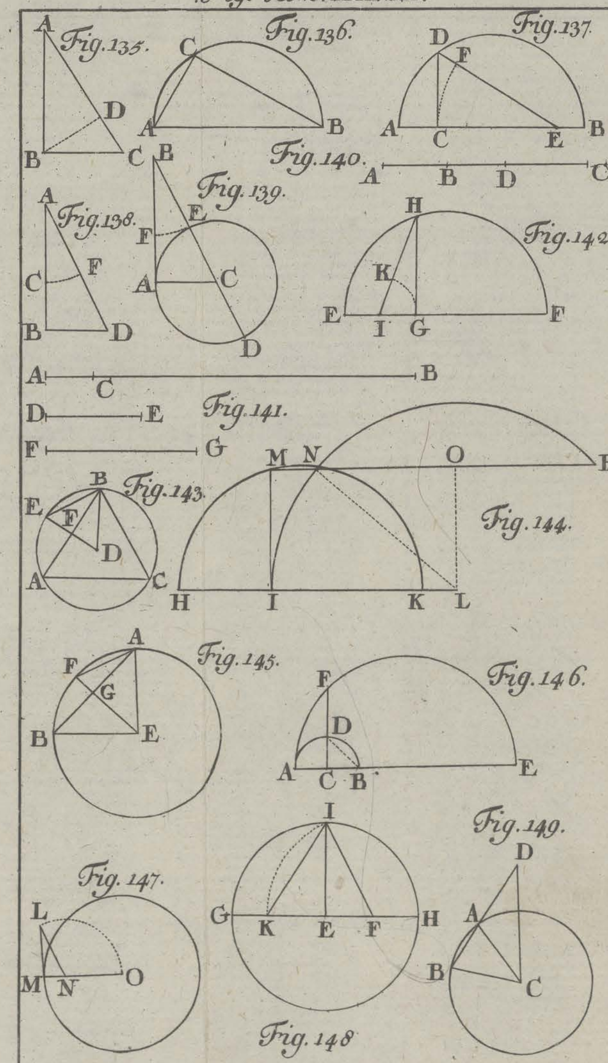


Fig. Geom. TAB. XII.

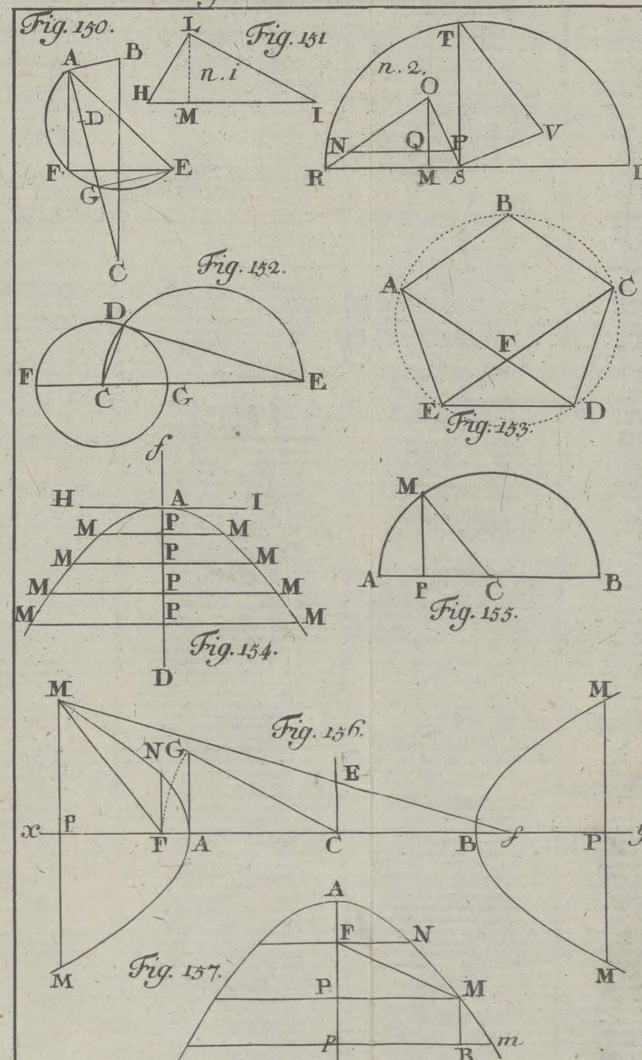


Fig. Geom. TAB. XIII.

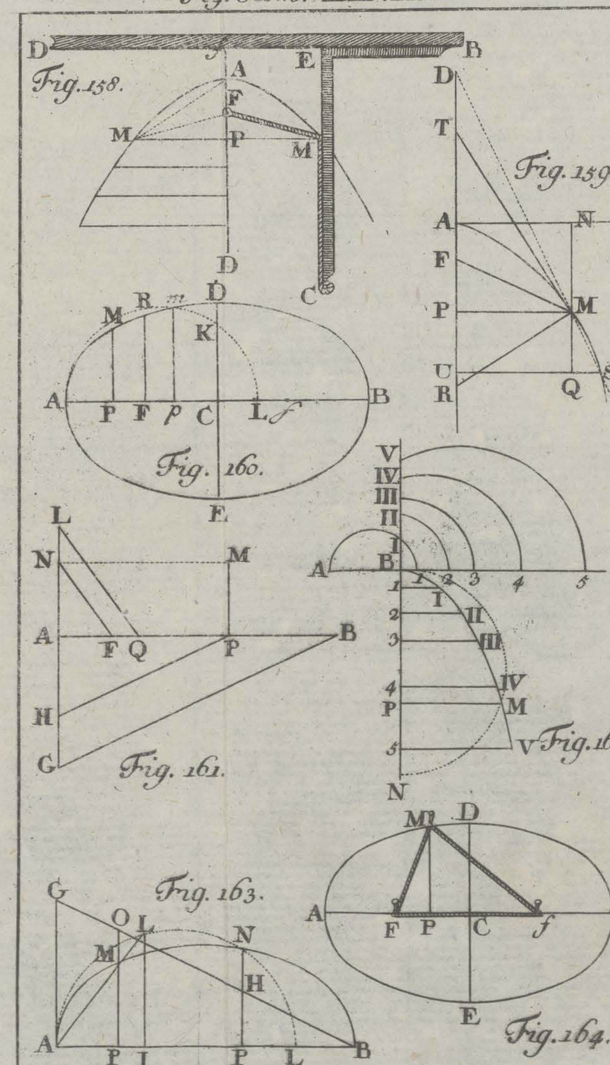


Fig. Geom. TAB. XIV.

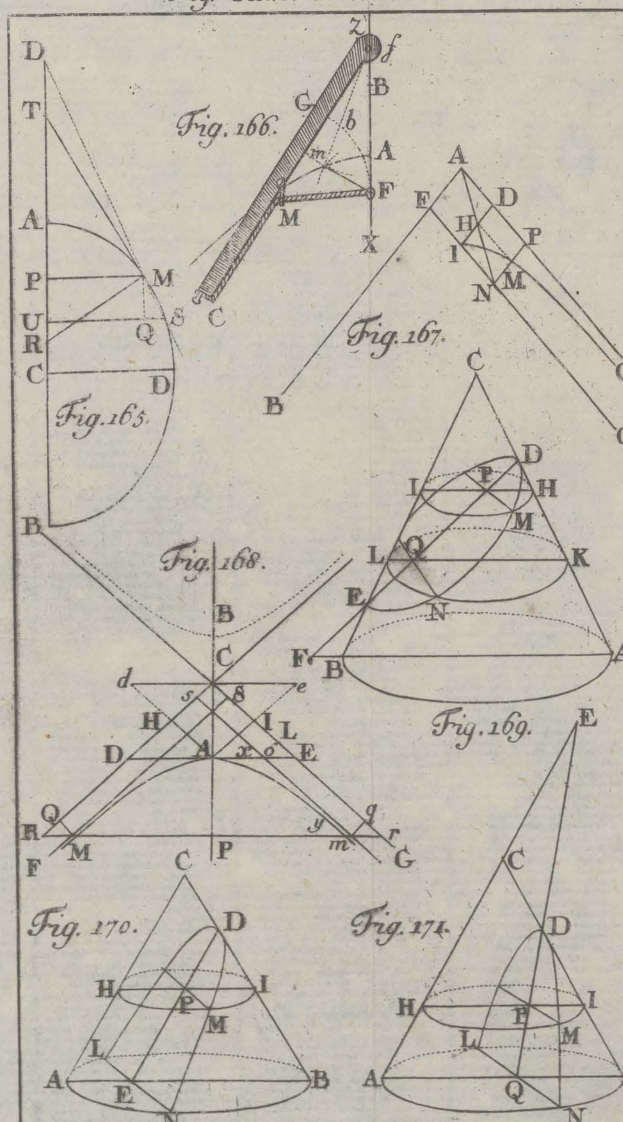


Fig. Trigonom. TAB.I.

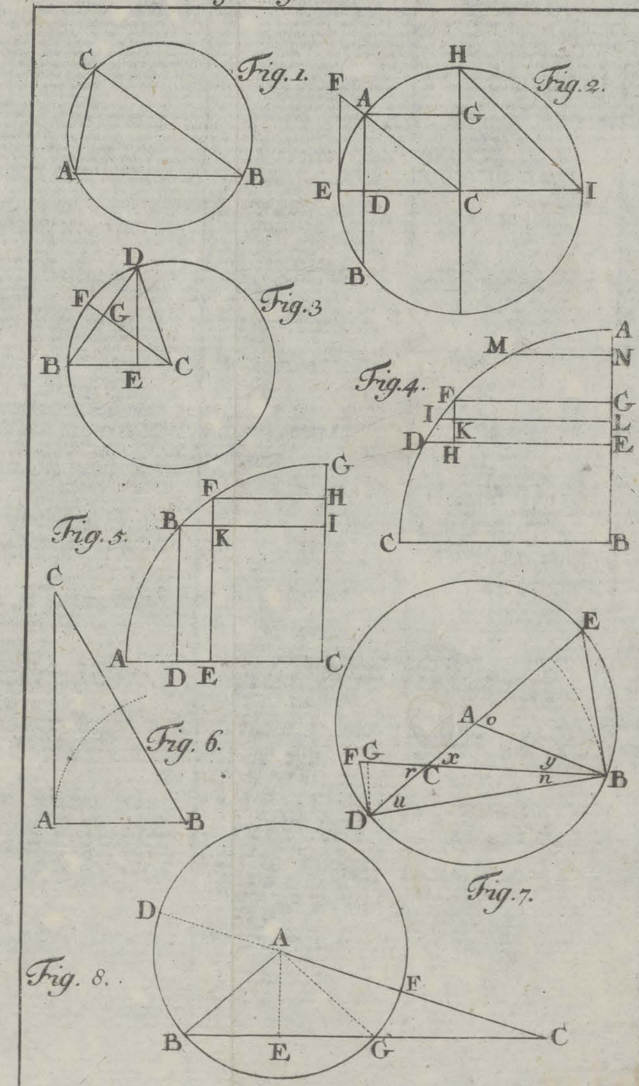


Fig. Trigonom. TAB II.

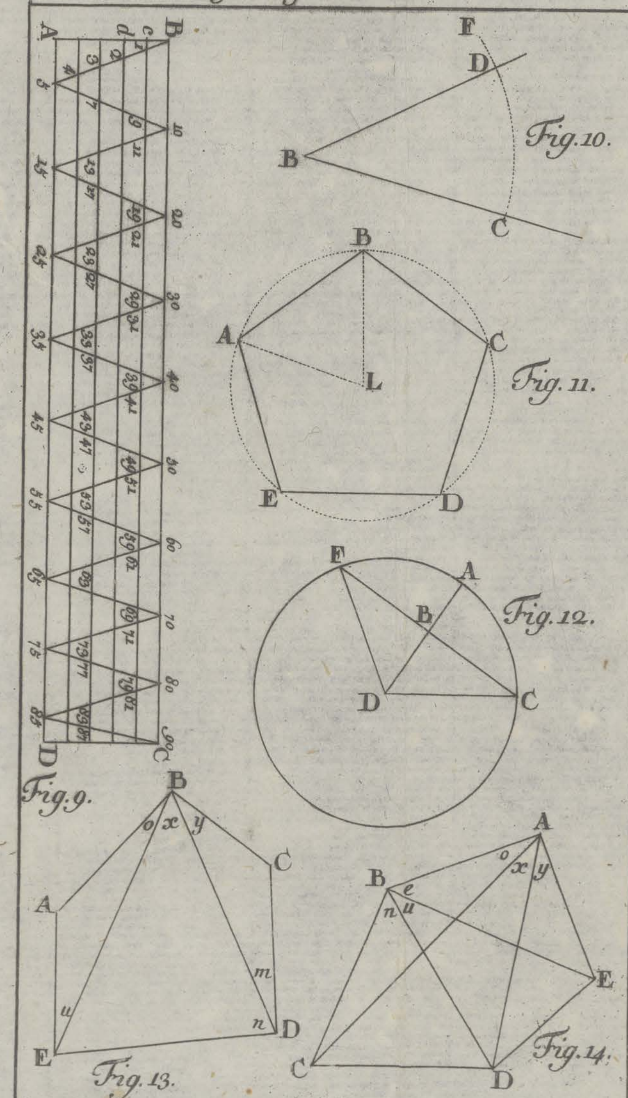
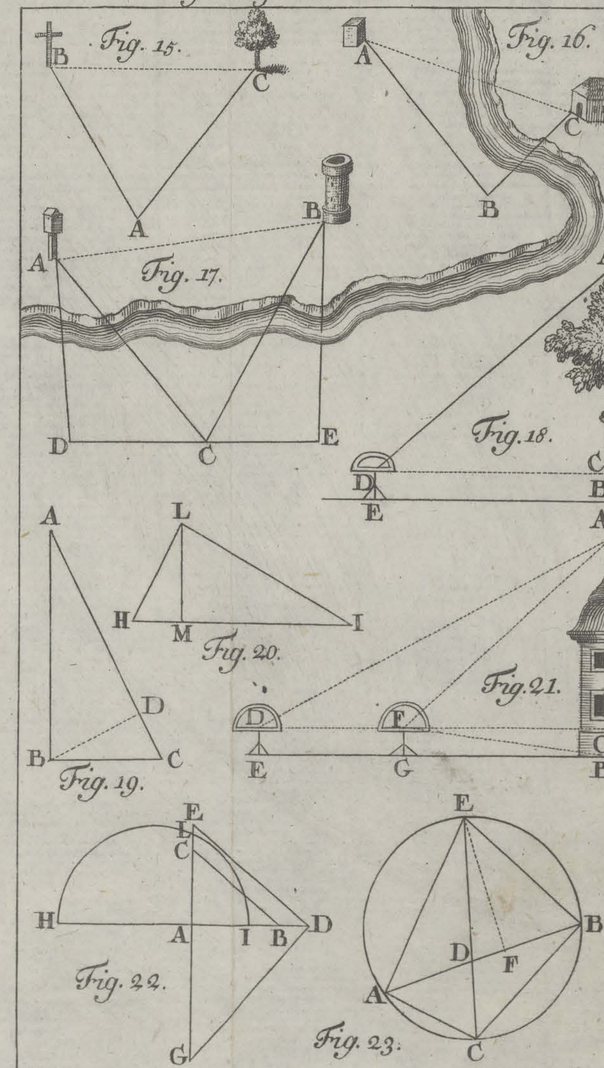


Fig. Trigonom. TAB.III.



W

M